浙江大学出版社

JUBU TUKONGJIAN YU GUANGYI HANSHULUN

# 局部凸空间与广义函数论

葛显良 编




封面设计：俞亚彤 ISBN 7-308-00963-7/O·115　定价：1.80元

# 局部凸空间与广义函数论

葛显良 编

浙江大学出版社

（浙）新登字10号

## 内 容 简 介

本书用局部凸空间理论和归纳限拓扑严格定义讨论了广义函数。内容包括：拓扑线性空间、局部凸空间、广义函数、卷积、Fourier变换、索波列夫定理和空间、Paley-Wiener-Schwartz定理、对微分方程的应用（包括基本解存在定理、解的正则性定理）等。局部凸空间是拓扑线性空间中最重要的一类，书中对归纳限局部凸空间作了较深入的讨论。

本书可作为高等学校数理专业高年级学生、研究生的教材，也可作为对广义函数有兴趣的有关专业的研究生、科研、工程技术人员的参考书。

局部凸空间与广义函数论

葛显良 编

责任编辑 朱谨准

浙江大学出版社出版

上虞科技外文印刷厂印装

浙江省新华书店发行

850×1168 1/32 4.9375 印张 124千字

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数 0001—1500

ISBN 7-308-00963-7/O·115 定价：1.80 元

# 基本符号

$\forall$　全称量词,对所有的
$\exists$　存在量词,存在某一个
$\Longrightarrow$　缊涵
$\Longleftrightarrow$　等价、当且仅当
$\boldsymbol{R}$　实数域
$\boldsymbol{C}$　复数域
$\boldsymbol{R}^d$　$d$ 维实欧氏空间
$\boldsymbol{C}^d$　$d$ 维复欧氏空间
$\mathscr{N}$　自然数集
$\boldsymbol{N}$　非负整数集
$\boldsymbol{N}^d$　$d$ 重非负整数集
$\operatorname{Im} z$　$z$ 的实部
$\operatorname{Re} z$　$z$ 的虚部
$\bar{z}$　$z$的共轭复数
$\phi$　空集
$\in$　属于
$\subset$　包含于
$\cup$　集合的并
$\cap$　集合的交
$\diagdown$　集合的差
$\overline{A}$　A 的闭包
$\mathring{A}$　A 的内部

# 目　录

# 第一章 局部凸空间

## 第一节 拓扑空间简介

§1.1 **定义** 如非空集合 $X$ 上给定了一个子集类 $\tau$，满足以下三条件：

① 空集 $\phi\in\tau$，$X\in\tau$；

② $\tau$ 中任意多个集的并集属于 $\tau$；

③ $\tau$ 中任意两个集的交集属于 $\tau$，

则称 $\tau$ 是 $X$ 的一个**拓扑**，$(X,\tau)$ 称为**拓扑空间**。$\tau$ 中的集合称为**开集**。以上三条件称为开集公理。

$X$ 上如有两个拓扑 $\tau_1,\tau_2$，如 $\tau_1\subset\tau_2$，称 $\tau_1$ 比 $\tau_2$ 弱（小、粗），或 $\tau_2$ 比 $\tau_1$ 强（大、细）。

§1.2 **定义** 拓扑空间 $X$ 中的子集 $F$ 称为**闭集**，如果其补集 $X\setminus F$ 是开集。由开集公理，得出以下三性质，称为闭集公理：

① $\phi$ 和 $X$ 都是闭集；

② 任意多个闭集的交集是闭集；

③ 任意两个闭集的并集是闭集。

§1.3 **定义** 拓扑空间 $X$ 中任一子集 $A$ 的**闭包**是指集合 $\overline{A}=\cap\{B\subset X: A\subset B,\ B$ 是 $X$ 中闭集$\}$，它是包含 $A$ 的最小闭集。

显然，如 $A\subset B$，则 $\overline{A}\subset\overline{B}$。

闭包有以下性质（①—④ 称为闭包公理）：

① $A\subset\overline{A}$；

② $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$；

③ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；

④ $\overline{\phi} = \phi$；

⑤ $A$ 是 $X$ 中闭集当且仅当 $A = \overline{A}$。

如 $\overline{A} = X$，则称 $A$ 是 $X$ 的**稠集**或 $A$ 在 $X$ 中**稠**。

§1.4 **定义** 如 $X$ 是拓扑空间，$A \subset X$，$A$ 的**内部**是指集合

$\mathring{A} = \text{int}\, A = \cup\{B \subset X : B \subset A, B \text{是开集}\}$。

它是包含在 $A$ 中的最大开集。

$\mathring{A}$ 中的点称为 $A$ 的**内点**。

易证：$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$，

$X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$。

如 $A \subset B$，则 $\mathring{A} \subset \mathring{B}$。

内部有以下性质：

① $\mathring{A} \subset A$；

② $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$；

③ $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$；

④ $\mathring{X} = X$；

⑤ $A$ 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$。

§1.5 **定义** 如 $X$ 是拓扑空间，$x \in X$，$X$ 的子集 $U$ 称为 $x$ 的**邻域**，如果存在开集 $G$ 满足 $x \in G \subset U$。

$x$ 点的邻域的全体组成的集类称为 $x$ 的**邻域系**，记作 $\mathscr{N}_x$。

$\mathscr{N}_x$ 的子类 $\mathscr{B}_x$ 称为 $x$ 的**邻域基**，如果 $\forall U \in \mathscr{N}_x$，$\exists V \in \mathscr{B}_x$，使 $V \subset U$。$\mathscr{B}_x$ 中元素称为基本邻域。$\mathscr{N}_x$ 可由 $\mathscr{B}_x$ 确定：

$\mathscr{N}_x = \{U \subset X : \exists V \in \mathscr{B}_x, \text{使} V \subset U\}$。

§1.6 **定理** 设 $X$ 是拓扑空间，$\forall x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 $x$ 的邻域基，则有以下性质：

① 如 $V \in \mathscr{B}_x$，则 $x \in V$；

② 如 $V_1, V_2 \in \mathscr{B}_x$，则存在 $V_3 \in \mathscr{B}_x$，使 $V_3 \subset V_1 \cap V_2$；

③ 如 $V \in \mathscr{B}_x$，则存在 $V_0 \in \mathscr{B}_x$，使得对任意的 $y \in V_0$，存在 $W \in \mathscr{B}_y$ 且 $W \subset V$；

（以上三条称为邻域基公理）

此外，还有

④ $G$ 是 $X$ 中开集当且仅当：$\forall x \in G$，$\exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \subset G$。

反之，在集合 $X$ 中，如果对每一个 $x \in X$，给定了 $X$ 的子集类 $\mathscr{B}_x$ 满足上面的 ①、②、③，则用 ④ 定义开集，这样定义出来的开集类 $\tau$ 满足开集公理，使 $(X, \tau)$ 成为拓扑空间，而按此拓扑 $\tau$，对每一 $x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 $x$ 点的邻域基。

§1.7 **定理** 设 $X$ 是拓扑空间，$\forall x \in X$，邻域基 $\mathscr{B}_x$ 已给定，则

① $G$ 是 $X$ 中开集 $\Longleftrightarrow \forall x \in G, \exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \subset G$。

② $F$ 是 $X$ 中闭集 $\Longleftrightarrow \forall x \bar{\in} F, \exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \cap F = \phi$。

③ $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathscr{B}_x$，$A \cap V \neq \phi$。

④ $x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists V \in \mathscr{B}_x$，$V \subset A$。

§1.8 **定义** 如 $(X, \tau)$ 是拓扑空间而 $A \subset X$，则集类 $\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$ 是 $A$ 上拓扑，称为 $\tau$ 关于 $A$ 的**相对拓扑**，或称为 $X$ 在 $A$ 上导出的**子拓扑**，$(A, \tau_A)$ 称为 $(X, \tau)$ 的**子拓扑空间**。

§1.9 **定义** 设 $X, Y$ 是两个拓扑空间，映射 $f: X \mapsto Y$，$x \in X$，$f$ 称为在 $x$ 点是**连续**的，如果对 $f(x)$ 在 $Y$ 中的任意邻域 $V$，存在 $x$ 在 $X$ 中的邻域 $U$，使 $f(U) \subset V$。$f$ 称为在 $X$ 上是连续的，如果 $f$ 在 $X$ 的每一点上是连续的。

§1.10 **定理** $f$ 在 $X$ 上连续，等价于下列条件中的任何一个：

① 对 $Y$ 中任一开集 $G$，$f^{-1}(G)$ 在 $X$ 中开。

② 对 $Y$ 中任一闭集 $F$，$f^{-1}(F)$ 在 $X$ 中闭。

③ 对 $X$ 的任一子集 $A$，$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$。

§1.11 **定义** 如映射 $f: X\mapsto Y$ 是一一的、映满，$f, f^{-1}$ 都连续，则称 $f$ 是 $X$ 到 $Y$ 上的**同胚映射**，简称同胚，此时称拓扑空间 $X$ 和 $Y$ 是**同胚**的。

§1.12 **定义** 设 $X, Y$ 是两个拓扑空间，$X\times Y$ 表示其乘积集合：

$X\times Y=\{(x,y): x\in X,\ y\in Y\}$，对 $X\times Y$ 中任一点 $(x,y)$，$\mathscr{U}_x$ 是 $x$ 点的邻域基，$\mathscr{V}_y$ 是 $y$ 点的邻域基，令

$$\mathscr{B}_{(x,y)}=\{U\times V: U\in\mathscr{U}_x,\ V\in\mathscr{V}_y\},$$

则 $\forall(x,y)\in X\times Y$，$\mathscr{B}_{(x,y)}$ 是 $X\times Y$ 上的子集类，满足定理 1.6 的邻域基公理①、②、③，以 $\mathscr{B}_{(x,y)}$ 作为 $(x,y)$ 点的邻域基可定义 $X\times Y$ 上的拓扑，此拓扑由 $X, Y$ 的拓扑唯一确定，与 $\mathscr{U}_x, \mathscr{V}_y$ 的选取无关，称为 $X\times Y$ 上的**乘积拓扑**。这样 $X\times Y$ 成为拓扑空间，称为 $X$ 与 $Y$ 的拓扑乘积空间。

当 $X\times Y$ 取乘积拓扑，则映射 $(x,y)\mapsto x$ 是 $X\times Y\mapsto X$ 连续的，映射 $(x,y)\mapsto y$ 是 $X\times Y\mapsto Y$ 连续的。而且乘积拓扑是使以上两个映射连续的 $X\times Y$ 上的最弱的拓扑。

§1.13 **定义** 设 $\Gamma$ 是非空集合，在 $\Gamma$ 上有一关系 $\leqslant$ 满足：

① 对任一 $r\in\Gamma$，$r\leqslant r$；

② 如 $r_1\leqslant r_2$，$r_2\leqslant r_3$，则 $r_1\leqslant r_3$；

③ 如 $r_1, r_2\in\Gamma$，则存在某 $r_3\in\Gamma$，使 $r_1\leqslant r_3$，$r_2\leqslant r_3$；

则称 $\Gamma$ 是**定向集**，关系 $\leqslant$ 称为 $\Gamma$ 上的**定向**或**方向**。

§1.14 **定义** 集 $X$ 中的一个**网**是指某定向集 $\Gamma$ 到 $X$ 中的一个映射 $F:\Gamma\mapsto X$，象点 $F(r)$ 通常表成 $x_r$，我们通常称"网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$"或简称"网 $(x_r)$"。

§1.15 **定义** 设 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 是拓扑空间 $X$ 中的网，$x\in X$，如果对 $x$ 的任意邻域 $U$，存在 $r_0\in\Gamma$，使当 $r\geqslant r_0$ 时有 $x_r\in U$，则称网 $(x_r)$ 收敛于 $x$，记作 $x_r\to x$，或 $\lim x_r=x$。

§1.16 **定理** 设 $A$ 是拓扑空间 $X$ 的子集，则 $x\in\bar{A}$ 当且仅

当存在某一 $A$ 中的网 $(x_r)$，使 $x_r \to x$。

§1.17 **定理** 设 $X,Y$ 是拓扑空间，映射 $f:X \mapsto Y$，$x \in X$，则 $f$ 在 $x$ 连续的充分必要条件是：

$$x_r \to x \Rightarrow f(x_r) \to f(x)。$$

§1.18 **定义** 拓扑空间 $X$ 称为**Hausdorff 空间或 $T_2$ 空间**，如果对 $X$ 中任意两个不同的点 $x,y$，存在两个不相交的开集 $G_1,G_2$，使 $x \in G_1$，$y \in G_2$。

§1.19 **定义** 拓扑空间 $X$ 称为**正则空间**，如果对 $X$ 中任意闭集 $A$ 和任意的点 $x \notin A$，存在两个不相交的开集 $G_1,G_2$，使 $x \in G_1$，$A \subset G_2$。

对拓扑空间 $X$，以下三者是等价的：

① $X$ 是正则的。

② 如 $U$ 在 $X$ 中开，$x \in U$，则存在开集 $V$ 使 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$。

③ 对 $X$ 中任意点 $x$，有由闭集构成的邻域基。

§1.20 **定义** 设 $E$ 是拓扑空间 $X$ 的子集，如有 $X$ 的子集族 $\mathscr{A} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$，使 $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \supset E$，则称它是 $E$ 的覆盖。如果 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$，$\mathscr{A}'$ 也是 $E$ 的覆盖，则称 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的子覆盖。如果覆盖 $\mathscr{A}$ 全由开集 $G_\alpha$ 组成，则称 $\mathscr{A}$ 为开覆盖。如果覆盖 $\mathscr{A}$ 由有限多个集合组成，则称 $\mathscr{A}$ 为有限覆盖。

$E$ 称为**紧集**，如果 $E$ 的任一开覆盖有有限子覆盖。如果 $X$ 本身是紧集，则称 $X$ 为**紧空间**。$E$ 是 $X$ 中的紧集，等价于 $E$ 作为 $X$ 的子拓扑空间是紧空间。

如 $X,Y$ 是拓扑空间，$f:X \mapsto Y$ 连续，如 $E$ 是 $X$ 中的紧集，则 $f(E)$ 是 $Y$ 中的紧集。

§1.21 **定义** 拓扑空间 $X$ 中子集 $E$ 称为**列紧集**，如果 $E$ 中任一序列有收敛子序列。

$E$ 称为**自列紧集**，如果 $E$ 中任一序列有收敛子序列，收敛于 $E$ 中的点。

§1.22 **定义** 设 $X$ 是非空集合，$d$ 是 $X\times X\mapsto \boldsymbol{R}$（实数域）中的映射，满足：对任意的 $x,y,z\in X$，

① $d(x,y)\geqslant 0$；

② $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

③ $d(x,y)=d(y,x)$；

④ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$（三角形不等式），

则称 $d$ 是 $X$ 上**距离**，$(X,d)$ 称为**距离空间**。

对 $x_0\in X$，$r>0$，$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$ 称为以 $x_0$ 为球心，$r$ 为半径的**开球**。

$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant r\}$ 称为以 $x_0$ 为球心，$r$ 为半径的**闭球**。

距离空间 $X$ 的子集 $G$ 称为开集，如果 $\forall x\in G$，$\exists r=r_x>0$，使 $B(x,r)\subset G$，由此定义的开集全体组成的集类 $\tau_d$ 满足开集公理。这样由距离 $d$ 定义了拓扑 $\tau_d$。如果 $(X,\tau)$ 是拓扑空间，$d$ 是 $X$ 上的距离，且 $\tau_d=\tau$，则称距离 $d$ 与拓扑 $\tau$ **相容**。如果 $X$ 上的拓扑 $\tau$ 与某一距离 $d$ 相容，则称 $(X,\tau)$ **可距离化**，或可赋距。

在距离空间中，紧集与自列紧集是相同的。

§1.23 **距离空间的完备性**

按拓扑空间中收敛网的定义，距离空间 $(X,d)$ 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 收敛于 $x$ 的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0\in\Gamma$，使得当 $r\geqslant r_0$ 时有 $d(x_r,x)<\varepsilon$。

距离空间中的结构比拓扑空间多，具有一些拓扑空间中没有的性质（在拓扑学中，距离空间是一种一致空间）。

距离空间 $(X,d)$ 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 称为 **Cauchy 网**，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0\in\Gamma$，使得当 $r_1\geqslant r_0$，$r_2\geqslant r_0$ 时，$d(X_{r_1},X_{r_2})<\varepsilon$。

距离空间 $(X,d)$ 称为**完备**的，如果其中的 Cauchy 网都收敛。距离空间为完备的充分必要条件是其中的 Cauchy 序列都收敛。

§1.24 **定义** 拓扑空间中的子集称为**疏集**，如果它的闭包无内点。一个集合如果能表示成可数多个疏集的并，则称它是**第一纲集**，否则称为**第二纲集**。

**Baire 纲定理** 完备距离空间是第二纲集。

## 第二节 拓扑线性空间简介

### §2.1 线性空间中的一些记号和术语

设 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域，$\boldsymbol{C}$ 表示复数域，$\boldsymbol{K}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$。设 $X$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间。如 $A\subset X, B\subset X, x\in X$ $F\subset\boldsymbol{K}, \lambda\in\boldsymbol{K}, \varepsilon>0$，用以下的记号：

$$x+A=\{x+a: a\in A\}$$

$$x-A=\{x-a: a\in A\}$$

$$A+B=\{a+b: a\in A, b\in B\}$$

$$\lambda A=\{\lambda a: a\in A\}$$

$$-A=-1\cdot A$$

$$FA=\{\lambda a: \lambda\in F, a\in A\}$$

$$Fx=\{\lambda x: \lambda\in F\}$$

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon)=\{\lambda\in\boldsymbol{K}: |\lambda|<\varepsilon\}$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)=\{\lambda\in\boldsymbol{K}: |\lambda|\leqslant\varepsilon\}$$

线性空间 $X$ 的子集 $A$ 称为均衡的，如 $\overline{\boldsymbol{K}}(1)A\subset A$。

设 $A, B$ 是线性空间 $X$ 中的非空子集，如果有 $\varepsilon>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)B\subset A$，则称 $A$ 吸收 $B$。如果 $A$ 吸收任何单元集，即如 $\forall x\in X$，$\exists\varepsilon>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)x\subset A$，则称 $A$ 是吸收集。

§2.2 **定义** 设 $\boldsymbol{K}$ 上线性空间 $X$ 上给定了拓扑 $\tau$，满足以下条件：

① 加法映射 $(x,y)\mapsto x+y$ 是 $X\times X\mapsto X$ 的连续映射，即对 $x+y$ 的任意邻域 $V$，存在 $x$ 的邻域 $V_1$ 和 $y$ 的邻域 $V_2$，使 $V_1+$

$V_2 \subset V$；

② 数乘映射 $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ 是 $\boldsymbol{K} \times X \mapsto X$ 的连续映射（其中 $\boldsymbol{K}$ 是按 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 的拓扑），即对 $\lambda x$ 的任一邻域 $V$，存在 $\varepsilon > 0$ 和 $x$ 的某一邻域 $W$ 使得 $(\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))W \subset V$，

则称此拓扑为 $X$ 上的**向量拓扑**，$(X, \tau)$ 称为**拓扑线性空间**。

设 $X$ 是拓扑线性空间，对应于每一固定的 $a \in X$，平移算子 $T_a : X \mapsto X$ 由表达式

$$T_a(x) = a + x, \ x \in X$$

定义。

对每一固定的数 $\lambda$，数乘算子 $M_\lambda : X \mapsto X$ 由表达式

$$M_\lambda(x) = \lambda x, \ x \in X$$

定义。

§ 2.3 **定理** 设 $X$ 是拓扑线性空间，$\forall a \in X$，$\forall \lambda \in \boldsymbol{K} \setminus \{0\}$，$T_a$ 和 $M_\lambda$ 是 $X \mapsto X$ 上的同胚。

由此，向量拓扑 $\tau$ 是平移不变的，即 $G$ 是开集当且仅当 $a + G$ 是开集。因此 $\tau$ 完全由零点的邻域基所确定。零点的邻域基简称为**局部基**。

§ 2.4 **定理** 在拓扑线性空间 $X$ 中，① 0 点的任一邻域 $U$ 包含 0 点的一个均衡邻域 $V$，因而可由均衡邻域构成局部基。② 如 $A \subset X$，$\mathscr{U}$ 为 $X$ 的局部基，则 $\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} (A + U)$。③ 零点的任一邻域 $U$ 包含零点的一个闭邻域 $W$，因而可由闭邻域构成局部基，从而拓扑线性空间是正则的。

［证］ ① 设 $U$ 是 0 的任一邻域，$0 \cdot 0 = 0$，因数乘是连续的，$\exists \varepsilon > 0$，和 $X$ 中 0 的邻域 $W$，使 $(0 + \boldsymbol{K}(\varepsilon))W \subset U$，令 $V = \boldsymbol{K}(\varepsilon)W = \bigcup_{0 < |\lambda| < \varepsilon} \lambda W$，则 $V$ 是 0 的邻域，$V$ 均衡，且 $V \subset U$。

② 如 $U$ 是 0 的邻域，则 $-U$ 也是 0 的邻域，所以 $U \cap (-U)$ 也是 0 的邻域，故

$$\mathscr{U}_1=\{U\cap(-U):U\in\mathscr{U}\}$$

也是 $X$ 的局部基，且

$$\bigcap_{U\in\mathscr{U}}(A+U)=\bigcap_{U\in\mathscr{U}_1}(A+U)。$$

由定理1.7③，$x\in\bar{A}\Longleftrightarrow\forall U\in\mathscr{U}_1,(x+U)\cap A\neq\phi\Longleftrightarrow\forall U\in\mathscr{U}_1, x\in A-U=A+U\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{U\in\mathscr{U}_1}(A+U)=\bigcap_{U\in\mathscr{U}}(A+U)$。

所以

$$\bar{A}=\bigcap_{U\in\mathscr{U}}(A+U)。$$

③ 设 $U$ 是 0 的任一邻域，存在 0 的邻域 $U_1$ 使 $U_1+U_1\subset U$，所以

$$\bar{U}_1=\bigcap_{V\in\mathscr{U}}(U_1+V)\subset U_1+U_1\subset U。$$

取 $W=\bar{U}_1$，则 $W$ 是 0 的闭邻域，且 $W\subset U$。所以有闭邻域构成的局部基。又因向量拓扑是平移不变的，由此 $X$ 是正则的。

§2.5 **定理** 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑线性空间 $X$ 的局部基，则满足下列四个条件：

① 对任意的 $U_1,U_2\in\mathscr{U}$，存在 $U_3\in\mathscr{U}$，使 $U_3\subset U_1\cap U_2$；

② 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$，使得 $V+V\subset U$；

③ 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$，使得 $\overline{\boldsymbol{K}}(1)V\subset U$；

④ $\mathscr{U}$ 中每个 $U$ 是吸收集。

[证] ① 即定理1.6中的邻域基公理②。

② 由加法的连续性，因 $0+0=0$。

③ 由定理2.4①，均衡邻域构成局部基。

④ 由 $0\cdot x=0$，数乘是连续的，对任一 $U\in\mathscr{U}$，$\exists\varepsilon>0$ 和 $x$ 的邻域 $W$，使 $(0+\boldsymbol{K}(\varepsilon))W\subset U$，而 $x\in W$，所以 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)x\subset U$，因而 $U$ 是吸收集。

§2.6 **定理** 设线性空间 $X$ 的子集类 $\mathscr{U}$ 满足定理2.5的四个条件，$\forall x\in X$，令 $\mathscr{B}_x=x+\mathscr{U}=\{x+U:U\in\mathscr{U}\}$，则 $\{\mathscr{B}_x: x\in X\}$ 满足定理1.6中的邻域基公理①、②、③，因此可定义 $X$ 上的拓扑 $\tau$，以 $\mathscr{B}_x$ 作为 $x$ 的邻域基，且 $(X,\tau)$ 是拓扑线性空

间。

[证] ① 如 $V\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U\in\mathscr{U}$，使 $V=x+U$，因 $U$ 是吸收的，$0\in U$，所以 $x\in V$。

② 如果 $V_1, V_2\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U_1, U_2\in\mathscr{U}$，使 $V_1=x+U_1$，$V_2=x+U_2$，由 § 2.5 的条件 ①，$\exists U_3\in\mathscr{U}$，使 $U_3\subset U_1\cap U_2$，令 $V_3=x+U_3$，则 $V_3\in\mathscr{B}_x$，$V_3\subset V_1\cap V_2$。

③ 如 $V\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U\in\mathscr{U}$，使 $V=x+U$，由 § 2.5 的条件 ②，$\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$，则 $V_0=x+U_1\in\mathscr{B}_x$。$\forall y\in V_0$，$W=y+U_1\in\mathscr{B}_y$，且 $W\subset V_0+U_1=x+U_1+U_1\subset x+U=V$。

所以 $\mathscr{B}_x$ 满足定理 1.6 的邻域基公理 ①、②、③，可以定义拓扑 $\tau$，以 $\mathscr{B}_x$ 为 $x$ 的邻域基。

以下证明加法的连续性。对 $x+y$ 的任意邻域 $U'$，$\exists U\in\mathscr{U}$，使 $U'\supset x+y+U$，又 $\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$，则 $x+U_1$，$y+U_1$ 分别是 $x, y$ 的邻域，且

$$(x+U_1)+(y+U_1)$$
$$=(x+y)+(U_1+U_1)\subset x+y+U\subset U'。$$

以下证明数乘的连续性：

对 $\lambda x$ 的任一邻域 $U'$，$\exists U\in\mathscr{U}$，使 $U'\supset\lambda x+U$，由 § 2.5 的条件 ②，$\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$。

由 § 2.5 条件 ④，$\exists\varepsilon_1>0$，使 $\mathbf{K}(\varepsilon_1)x\subset U_1$。

取 $N$ 为不超过 $|\lambda|+1$ 的最大整数，即 $N\leqslant|\lambda|+1<N+1$，重复使用 § 2.5 的条件 ②，$\exists U_2\in\mathscr{U}$，使

$$\underbrace{U_2+U_2+\cdots+U_2}_{N\text{项}}\subset U_1,$$

令
$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1, N-|\lambda|\}>0,$$

由 § 2.5 条件 ③，取 $U_3\in\mathscr{U}$，使 $\overline{\mathbf{K}}(1)U_3\subset U_2$，取 $W=x+U_3$，则 $W$ 是 $x$ 的邻域，

$$(\lambda+\mathbf{K}(\varepsilon))W=(\lambda+\mathbf{K}(\varepsilon))(x+U_3)$$

$$= \lambda x + \boldsymbol{K}(\varepsilon)x + (\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3$$
$$\subset \lambda x + \boldsymbol{K}(\varepsilon_1)x + (\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3$$
$$\subset \lambda x + U_1 + (\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3。$$

$\forall \mu \in \lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon)$, $|\mu| < |\lambda| + \varepsilon \leqslant |\lambda| + N \overset{令}{=} |\lambda| = N$,

所以 $$\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon) \subset N\boldsymbol{K}(1),$$

$$(\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3 \subset N\boldsymbol{K}(1)U_3 \subset NU_2 \subset U_1,$$

因此 $$(\lambda + \boldsymbol{K}(\varepsilon))W \subset \lambda x + U_1 + U_1 \subset \lambda x + U \subset U'。$$

## §2.7 拓扑线性空间中的收敛网、Cauchy 网、完备性

设拓扑线性空间 $X$ 的局部基为 $\mathscr{U}$，按拓扑空间中收敛网的定义 1.15，$X$ 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 收敛于 $x\in X$ 的充分必要条件是：$\forall U\in\mathscr{U}$，$\exists r_0\in\Gamma$，当 $r\geqslant r_0$，$x_r - x\in U$。

由于拓扑线性空间中有加法结构(它是拓扑群，因而也是一致空间)，故可定义 Cauchy 网与完备性。

**定义** ① 拓扑线性空间 $X$ 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 称为 **Cauchy 网**，如果对 $X$ 中零点的任意邻域 $U$，存在 $r_0\in\Gamma$，使得当 $r_1\geqslant r_0$，$r_2\geqslant r_0$ 时，有 $x_{r_1} - x_{r_2}\in U$。

② 拓扑线性空间称为**完备**的，如果其中的 Cauchy 网均收敛。

§2.8 **定义** 拓扑线性空间 $X$ 上的距离 $d$ 称为**平移不变的**(简称**不变的**)，如对任意的 $x,y,z\in X$，$d(x+z,y+z)=d(x,y)$。如果拓扑线性空间 $(X,\tau)$ 上有距离 $d$ 与 $\tau$ 相容(由 $d$ 产生的拓扑 $\tau_d=\tau$)，则称拓扑线性空间**可距离化**，或称**可赋距**。

§2.9 **定理** 拓扑线性空间 $X$ 可赋距的充分必要条件是，$X$ 是 Hausdorff 空间且有可数的局部基，即有由可数多个邻域组成的局部基。

如拓扑线性空间 $(X,\tau)$ 可赋距，则必有一个不变距离 $d$ 与 $\tau$ 相容。

如拓扑线性空间 $(X,\tau)$ 可赋不变距离 $d$，则显然按拓扑线性

空间定义的 Cauchy 网与按距离 $d$ 定义的Cauchy 网是相同的，所以按拓扑线性空间完备与按距离 $d$ 完备是相同的。

完备的赋不变距离的拓扑线性空间称为 $\boldsymbol{F}$ 空间。

§2.10 **定义** 在拓扑线性空间中，集合 $B$ 称为有界的，如果它被零点的任一邻域 $U$ 吸收，即 $\exists \varepsilon=\varepsilon_U>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)B\subset U$。

由于均衡邻域构成局部基，$B$ 有界的充分必要条件是：对局部基中的任一邻域 $U$，$\exists t>0$，使 $B\subset tU$。

由于闭邻域构成局部基，故如 $B$ 有界，则 $\bar{B}$ 也有界。

以下叙述几个以后要用到的定理，其证明可参看泛函分析的教材，如 Rudin 的 Functional Analysis。

§2.11 **定理**(Banach-Steinhauss) 设 $X$ 是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$Y$ 是拓扑线性空间，$T_n: X\mapsto Y$ 是连续线性算子，$n=1,2,\cdots$；又设对每一个 $x\in X$；$\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ 存在，其极限值记作 $T(x)$，则 $T$ 是 $X\mapsto Y$ 的连续线性算子。

§2.12 **定理** 设 $X$ 是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$Y,Z$ 是拓扑线性空间；设 $B:X\times Y\mapsto Z$ 是双线性映射且分别连续，即 $\forall x\in X, B(x,\cdot): Y\mapsto Z$ 连续线性，$\forall y\in Y$，$B(\cdot, y): X\mapsto Z$ 连续线性。如果 $x_n\in X$，$x_n\to x, y_n\in Y, y_n\to y$，则有

$$B(x_n,y_n)\to B(x,y)。$$

§2.13 **闭图象定理** 设 $X,Y$ 都是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$T: X\mapsto Y$ 是线性算子，$T$ 的图象 $G(T)=\{(x,Tx): x\in X\}$ 在 $X\times Y$ 中闭，则 $T$ 是连续的。

$G(T)$ 是闭的等价于：如 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n=y$，则 $y=Tx$。

§2.14 **逆算子定理** 设 $X,Y$ 都是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$T: X\mapsto Y$ 是一一的、映满的连续线性算子，则 $T^{-1}: Y\mapsto X$ 是连续的。

## 第三节 半范与局部凸空间

§3.1 **定义** 线性空间 $X$ 的子集 $C$ 称为**凸集**，如果对所有的 $t\in[0,1]$，$C+(1-t)C\subset C$。

如果 $x,y\in X$，集合 $[x,y]=\{tx+(1-t)y : t\in[0,1]\}$ 称为以 $x,y$ 为端点的**线段**或**闭区间**。

集合 $(x,y)=\{tx+(1-t)y : t\in(0,1)\}$ 称为以 $x,y$ 为端点的**开区间**。

故 $X$ 的子集 $C$ 是凸集的充分必要条件是：以 $C$ 中任意两点为端点的线段都包含在 $C$ 中。

任意多个凸集的交集仍是凸集。

如果 $A$ 是 $X$ 的子集，$A$ 的凸包是指集合

$\mathrm{Co}\,A=\bigcap\{B\subset X : B$ 是凸集，$B\supset A\}$。故 $A$ 的凸包即是包含 $A$ 的最小凸集，且

$$\mathrm{Co}\,A=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i : n\text{ 是自然数}, x_i\in X, \lambda_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\}.$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ 称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的凸组合。

如 $A,B$ 是 $X$ 中凸集，$\lambda\in\boldsymbol{K}$，则 $A+B,\lambda A$ 仍是凸集。

§3.2 **定义** 设 $X$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$X$ 上**半范** $p$ 是指定义在 $X$ 上的实值函数

$p:X\mapsto\boldsymbol{R}$，且满足以下条件：对所有的 $x,y\in X$ 和所有的数 $\lambda\in\boldsymbol{K}$，

① $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

② $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$。

条件 ① 称为次可加性。条件 ② 称为绝对齐性。由以上定义可推出

$$p(x)\geqslant 0,\ p(0)=0。$$

$X$ 中所有半范构成的集合记作 $X^s$。

设 $p,q$ 是定义在 $X$ 上的两个实值函数，如果对所有的 $x\in X$，均有 $p(x)\leqslant q(x)$，则定义为 $p\leqslant q$。显然这样定义的 $\leqslant$ 是一个半序关系，满足以下三条件：

① $p\leqslant p$；

② 如 $p\leqslant q$，$q\leqslant r$，则 $p\leqslant r$；

③ 如 $p\leqslant q$，$q\leqslant p$，则 $p=q$。

§3.3　**定义**　设 $X,Y$ 是两个同一数域 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间，$T$ 是把 $X$ 映射到 $Y$ 中的线性算子 $T: X\mapsto Y$。$P$ 是 $X^s$ 中的非空子集，即 $P$ 是一族 $X$ 上的半范，$Q$ 是 $Y^s$ 中的非空子集，如果 $\forall q\in Q$，$\exists p\in P$，使 $qT\leqslant p$，则称 $T$ 是 **$(P,Q)$ 连续的**。

注意：这里引入的 $(P,Q)$ 连续概念是纯代数概念，还没有引进拓扑，因而还不是拓扑概念。

§3.4　**定义**　$X^s$ 的子集 $H$ 称为**可传**的，如果 $p\in H$，$q\in X^s$ 且 $q\leqslant p$，则必有 $q\in H$。即被 $H$ 中半范所控制的半范均在 $H$ 中。

如果 $P$ 是 $X^s$ 的非空子集，记

$H(P)=\{p'\in X^s: \exists p\in P$ 使 $p'\leqslant p\}$。则 $H(P)$ 是 $X^s$ 中包含 $P$ 的最小可传子集，称为 $P$ 的**可传包**。

易证以下四个命题是等价的：

① $T$ 是 $(P,Q)$ 连续的。

② $T$ 是 $(H(P),Q)$ 连续的。

③ $T$ 是 $(P,H(Q))$ 连续的。

④ $T$ 是 $(H(P),H(Q))$ 连续的。

§3.5　**定义**　设 $X$ 是线性空间，$X^s$ 中非空的可传子集称为 $X$ 的一个**半范系**，如满足以下两条件：

① $p_1,p_2\in H\Rightarrow p_1\vee p_2\in H$；

② $p\in H,\lambda>0\Rightarrow \lambda p\in H$。

以上 $(p_1\vee p_2)(x)=\max\{p_1(x),p_2(x)\}$。

§3.6 **定义** $X^*$ 中非空子集 $P$ 称为 $X$ 的一个**半范基**，如果它的可传包 $H(P)$ 是半范系。

易证：$P$ 是半范基当且仅当同时满足以下两条件：

① 对任意的 $p_1,p_2\in P$，存在 $r\in P$ 满足 $r\geqslant p_1\vee p_2$；

② 对任意的 $p\in P$，$\lambda>0$，存在 $q\in P$ 使得 $q\geqslant\lambda p$。

记 $B_p(1)=\{x\in X: p(x)<1\}$，

则 $B_p(1)$ 是凸的均衡集，或称绝对凸集。

§3.7 **定理** 设 $P$ 是 $X$ 的半范基，则 $X$ 的子集类 $\mathscr{U}=\{B_p(1): p\in P\}$ 满足下列条件：

① 对任意的 $U_1,U_2\in\mathscr{U}$，存在 $U_3\in\mathscr{U}$，使 $U_3\subset U_1\cap U_2$；

② 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得 $V+V\subset U$；

③ 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得 $\overline{K}(1)V\subset U$；

④ $\mathscr{U}$ 中每个元素 $U$ 都是吸收集。

此外，还有

⑤ 对任意的 $U\in\mathscr{U}$ 和任意的 $x\in U$，存在 $V\in\mathscr{U}$ 使 $x+V\subset U$。

注：以上条件 ①—④ 即是定理 2.5、2.6 中所述的拓扑线性空间中局部基的必要充分条件。条件⑤保证 $\mathscr{U}$ 中集合 $U$ 是开集。

［证］ ① 设 $U_1=B_{p_1}(1),U_2=B_{p_2}(1)\in\mathscr{U}$，则存在 $r\in P$ 使得 $r\geqslant p_1\vee p_2$，令 $U_3=B_r(1)\in\mathscr{U}$，则易验证 $U_3\subset U_1\cap U_2$。

② 设 $U=B_p(1)\in\mathscr{U}$，则存在 $q\in P$，使得 $q\geqslant 2p$，令 $V=B_q(1)\in\mathscr{U}$，则易验证 $V+V\subset U$。

③ 设 $U=B_p(1)\in\mathscr{U}$，取 $V=U$，则因 $B_p(1)$ 是均衡的，$\overline{K}(1)V\subset V=U$。

④ 对任一 $U=B_p(1)\in\mathscr{U}$，$\forall x\in X$，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{p(x)+\delta}$，其中 $\delta>0$，则当 $|\lambda|<\varepsilon$ 时，$p(\lambda x)<1$，即 $\lambda x\in U$，所以 $K(\varepsilon)x\subset U$，所

以 $U$ 是吸收集。

⑤ 对任意的 $U=B_p(1)\in\mathscr{U}$ 和任意的 $x\in U$，$p(x)<1$，$1-p(x)>0$，存在 $q\in P$ 使得 $q\geqslant\frac{1}{1-p(x)}p$，令 $V=B_q(1)$，则 $\forall y\in V$，

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)\leqslant p(x)+(1-p(x))q(y)$$
$$<p(x)+1-p(x)=1,$$

所以
$$x+y\in U,$$
$$x+V\subset U。$$

§3.8 **定理** 设 $P$ 是线性空间 $X$ 的一个半范基，则 ① 存在 $X$ 上的向量拓扑 $\tau$ 使得 $(X,\tau)$ 成为拓扑线性空间，而 $\mathscr{U}=\{B_p(1):p\in P\}$ 为其局部基，$\forall x\in X$，$\mathscr{B}_x=\{x+B_p(1):p\in P\}$ 为 $x$ 的邻域基。

② $\forall x\in X,\forall p\in P$，$x+B_p(1)$ 按此拓扑是开集。

③ 存在由凸集构成的邻域基。

④ 按此拓扑 $\tau$ 连续的半范的全体即是 $P$ 的可传包 $H(P)$。

［证］ ① 由定理 2.6 推出。

② $\forall y\in x+B_p(1)=x+U$，$U\in\mathscr{U}$，则 $y-x\in U$，由定理 3.7⑤，存在 $V\in\mathscr{U}$ 使得 $y-x+V\subset U$，即 $y+V\subset x+U$，而 $y+V\in\mathscr{B}_y$，由定理 1.6④，$x+B_p(1)$ 是开集。

③ 因 $B_p(1)$ 是凸集。

④ 设 $q$ 是 $X$ 上的半范，因

$$|q(x)-q(y)|\leqslant q(x-y) \tag{3.8.1}$$

$q$ 在 $X$ 上连续的充分必要条件是 $q$ 在 0 点连续。

如 $q\in H(P)$，则 $\exists p_1\in P$ 使 $q\leqslant p_1$。

$\forall\varepsilon>0$，由半范基的定义，$\exists p_2\in P$ 使 $p_2\geqslant p_1/\varepsilon$。

由 $\tau$ 的定义，$B_{p_2}(1)$ 是 0 点的邻域，$\forall x\in B_{p_2}(1)$，$p_2(x)<1$，

$$q(x)\leqslant p_1(x)\leqslant\varepsilon p_2(x)<\varepsilon,$$

所以 $q$ 在 0 点连续，因而 $q$ 在 $X$ 连续。

反之，若 $q$ 是按 $\tau$ 连续的半范，对 $\varepsilon=1$，存在 $X$ 的局部基 $\mathscr{U}$ 中的邻域 $B_p(1)$，$p\in P$，使

$$x\in B_p(1)\Rightarrow q(x)<1$$

即

$$p(x)<1\Rightarrow q(x)<1,$$

所以 $\forall x\in X$，$\forall\delta>0$，$p\left(\frac{x}{p(x)+\delta}\right)<1$，所以 $q\left(\frac{x}{p(x)+\delta}\right)<1$，

即

$$q(x)<p(x)+\delta。$$

令 $\delta\to 0$，得 $q(x)\leqslant p(x)$，

所以 $q\leqslant p$，因此 $q\in H(P)$。

§3.9 **定义** 设 $P$ 是线性空间 $X$ 的半范基，以 $\{B_p(1):p\in P\}$ 为局部基的拓扑线性空间称为由 $P$ 生成的**局部凸空间** $(X,H(P))$，当 $H$ 为半范系时，称为局部凸空间 $(X,H)$。

由定理 3.8，局部凸空间 $(X,H(P))$ 有由凸邻域构成的局部基。以下证明其逆定理。

§3.10 **引理** 拓扑线性空间 $X$ 中，

① 如 $C$ 是 $X$ 的凸子集，则其内部 $\dot{C}$ 也是凸集。

② 如 $B$ 是 $X$ 的均衡子集，且 $0\in\mathring{B}$，则 $\dot{B}$ 也是均衡集。

③ 0 点的任一凸邻域包含 0 点的一个均衡、凸、开邻域。

④ 如 $V$ 是 0 点的均衡、凸、开邻域，则由表达式

$p_V(x)=\inf\{t>0:t^{-1}x\in V\}$，$x\in X$，定义的 $X$ 上的实泛函 $p_V:X\mapsto\boldsymbol{R}$ 是 $X$ 上连续半范，且 $\{x\in X:p_V(x)<1\}=V$。

（注：$p_V$ 称为 $V$ 的 Minkowski 泛函）

〔证〕 ① 因 $\dot{C}\subset C$，$C$ 凸，如 $t\in(0,1)$，$t\dot{C}+(1-t)\dot{C}\subset C$，由定理 2.3，当 $t\neq 0$ 时数乘映射 $M_t$ 是 $X\mapsto X$ 的同胚，$t\dot{C}$，$(1-t)\dot{C}$ 是开集，又由于平移也是同胚，$t\dot{C}+(1-t)\dot{C}=\bigcup\limits_{x\in t\dot{C}}[x+(1-t)\dot{C}]$ 是开集，因 $\dot{C}$ 是包含在 $C$ 中的最大开集，故 $t\dot{C}+(1-t)\dot{C}\subset$

$\mathring{C}$，所以 $\mathring{C}$ 是凸集。

② 如 $0<|\lambda|<1$，因 $x\mapsto\lambda x$ 是同胚，故 $\lambda\mathring{B}=(\lambda B)^{\circ}$，$\lambda\mathring{B}$ 是开集，因 $B$ 均衡，$\lambda\mathring{B}\subset\lambda B\subset B$，故 $\lambda\mathring{B}\subset\mathring{B}$，如 $0\in\mathring{B}$，则对 $\lambda=0$，也有 $0\,\mathring{B}\subset\mathring{B}$，所以 $\mathring{B}$ 是均衡集。

③ 设 $U$ 是 0 点的任一凸邻域。令 $A=\bigcap\limits_{|\lambda|=1}\lambda U$。由定理2.4，存在 0 点的均衡邻域 $V$，使 $V\subset U$。因 $V$ 是均衡的，当 $|\lambda|=1$ 时，$V=\lambda V\subset\lambda U$，故 $V\subset\bigcap\limits_{|\lambda|=1}\lambda U=A$，$\mathring{V}\subset\mathring{A}$，所以 $\mathring{A}$ 是 0 的开邻域，$\mathring{A}\subset U$。$A$ 是凸集的交，故 $A$ 是凸集，由 ① $\mathring{A}$ 是凸集。
$\forall\alpha\in\overline{\boldsymbol{K}}(1)$，$\alpha=re^{i\theta}$，$0\leqslant r\leqslant1$，$\theta\in\boldsymbol{R}$，

$$\alpha A=\bigcap_{|\lambda|=1}re^{i\theta}\lambda U=\bigcap_{|\lambda|=1}r\lambda U$$
$$=\bigcap_{|\lambda|=1}[(1-r)\cdot 0+r\lambda U]\subset\bigcap_{|\lambda|=1}\lambda U=A,$$

所以 $A$ 是均衡的。$0\in\mathring{A}$，由 ②，$\mathring{A}$ 是均衡的。所以 $\mathring{A}$ 是被 $U$ 包含的均衡、凸、开邻域。

④ 由于邻域 $V$ 是吸收的，$p_V$ 有定义，且 $0\leqslant p_V<\infty$。令实数集 $H_V(x)=\{t>0:t^{-1}x\in V\}$，设 $t\in H_V(x)$，$s>t$，则因 $0\in V$，$V$ 凸，由 $t^{-1}x\in V$ 推出 $s^{-1}x\in V$，$s\in H_V(x)$，故 $[t,+\infty)\subset H_V(x)$，因而 $H_V(x)$ 是半直线，它的左端点是 $p_V(x)$，即

$$(p_V(x),+\infty)\subset\{t>0:t^{-1}x\in V\}\qquad(3.10.1)$$

设 $s=p_V(x)+\varepsilon$，$t=p_V(y)+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，则 $s^{-1}x\in V$，$t^{-1}y\in V$，因 $V$ 是凸的，

$$(s+t)^{-1}(x+y)=\frac{s}{s+t}(s^{-1}x)+\frac{t}{s+t}(t^{-1}y)\in V,$$

故
$$p_V(x+y)\leqslant s+t=p_V(x)+p_V(y)+2\varepsilon。$$

令 $\varepsilon\to0$，得 $p_V(x+y)\leqslant p_V(x)+p_V(y)$。

如 $t\geqslant0$，易证 $p_V(tx)=tp_V(x)$。

由于 $V$ 是均衡的，$\forall\lambda\in\boldsymbol{K}$，

$$p_V(\lambda x)=|\lambda|p_V(x).$$

所以 $p_V$ 是 $X$ 上半范。

$\forall \varepsilon>0$，$\varepsilon V$ 是 0 的邻域，当 $x\in \varepsilon V$，$\varepsilon^{-1}x\in V$，由 $p_V$ 的定义，$p_V(x)\leqslant\varepsilon$，所以 $p_V$ 是连续的。

当 $x\in V$，由于 $V$ 是开集，因而是 $x$ 的邻域，由数乘的连续性，由 $1\cdot x\in V$，$\exists \varepsilon>0$，使 $(1+\varepsilon)x\in V$，所以 $p_V(x)\leqslant(1+\varepsilon)^{-1}<1$，所以 $V\subset\{x\in X: p_V(x)<1\}$。

另一方面，如 $p_V(x)<1$，由 (3.10.1)，$1\cdot x\in V$，

所以 $\{x\in X: p_V(x)<1\}\subset V$。

因此 $V=\{x\in X: p_V(x)<1\}=B_{p_V}(1)$。

§3.11 **定理** 如拓扑线性空间 $(X,\tau)$ 有由凸邻域构成的局部基，则必有半范基 $P$，由 $P$ 生成的局部凸空间 $(X,H(P))$ 即是 $(X,\tau)$。

［证］ 设 $(X,\tau)$ 有由凸邻域构成的局部基，则由引理 3.10，一定有均衡、凸、开邻域 $V$ 构成的局部基 $\mathscr{U}=\{V\}$。对应于每一 $V\in\mathscr{U}$，有半范 $p_V$ 使 $B_{p_V}(1)=V$，令 $P=\{p_V: V\in\mathscr{U}\}$，则易验证 $P$ 是半范基。局部凸空间 $(X,H(P))$ 的局部基为 $\{B_p(1): p\in P\}$ 与 $(X,\tau)$ 的局部基 $\mathscr{U}=\{V\}$ 相同，故拓扑相同。

由定理 3.8、3.11 可知，拓扑线性空间 $(X,\tau)$ 是局部凸空间 $(X,H(P))$ 的充分必要的条件是：有凸邻域构成的局部基。因此也可以以此条件作为局部凸空间的等价定义。

§3.12 **定理** 设 $P$ 是 $X$ 的半范基，$Q$ 是 $Y$ 的半范基，$T: X\mapsto Y$ 是线性算子，则按 3.3 定义的 $(P,Q)$ 连续与局部凸空间 $(X,H(P))\mapsto(Y,H(Q))$ 拓扑意义下的连续相同。

［证］ 设 $T$ 是 $(P,Q)$ 连续的，即

$$\forall q\in Q,\ \exists p\in P,\ 使\ qT\leqslant p \tag{3.12.1}$$

对 $Y$ 的局部基中的任一邻域 $B_q(1)$，$q\in Q$，取 $p\in P$，使 $qT\leqslant p$。

$\forall x\in B_p(1)$，即 $p(x)<1$，则有

$$q(T(x))\leqslant p(x)<1,$$

所以 $T(x)\in B_q(1)$，

$T(B_p(1))\subset B_q(1)$，

因此 $T$ 在 0 点连续。因 $T$ 是线性的，所以 $T$ 在 $X$ 上连续。

反之，设 $T$ 按拓扑连续，则 $\forall q\in Q, B_q(1)$ 是 $Y$ 中 0 的邻域，存在 $X$ 中 0 点的基本邻域 $B_p(1)$，$p\in P$，使 $T(B_p(1))\subset B_q(1)$，即

$$p(x)<1\Rightarrow q(Tx)<1,$$

类似于定理 3.8④ 最后的论证，可得

$$qT\leqslant p,$$

所以 $T$ 是$(P,Q)$连续的。证毕。

如 $P$ 是 $X^s$ 中的任一非空子集，即是任意的一族半范，令

$P'=\{n(p_1\vee p_2\cdots\vee p_n)$：$n$ 为自然数，$p_i\in P$，$1\leqslant i\leqslant n\}$，

则 $P'$ 是包含 $P$ 的半范基。如 $T$ 是$(P,Q)$连续的，则 $T:(X,H(P'))\mapsto(Y,H(Q'))$连续。其逆命题不成立。

§3.13 **收敛网、Cauchy网** 由收敛网、Cauchy 网的定义，可推出，在局部凸空间$(X,H(P))$中网$(x_\gamma)$收敛于 $x$ 的充分必要条件是：$\forall p\in P$，$p(x_\gamma-x)\to0$。

$(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 是 Cauchy 网的充分必要条件是：$\forall p\in P$，$\exists\gamma_0\in\Gamma$，当 $\gamma_1\geqslant\gamma_0$，$\gamma_2\geqslant\gamma_0$，$p(x_{\gamma_1}-x_{\gamma_2})<1$。

§3.14 **定理** 局部凸空间$(X,H(P))$的子集 $B$ 为有界的充分必要条件是：

$$\forall p\in P,\ \sup p(B)=\sup_{x\in B}p(x)=M_p<\infty。$$

§3.15 **定理** 局部凸空间$(X,H(P))$是 Hausdorff 空间的充分必要条件是：$\forall x\in X\setminus\{0\},\exists p\in P$，使 $p(x)>0$。

以后还要用到泛函分析中的一些重要定理。叙述如下。

§3.16 **Hahn-Banach 定理** 设 $M$ 是线性空间 $X$ 的线性

子空间，$p$是$X$上的一个半范，$f$是$M$上线性泛函且满足：

$$\forall x\in M,\ |f(x)|\leqslant p(x)。$$

则$f$可以延拓成$X$上的线性泛函$\Lambda$，且满足

$$\forall x\in X,\ |\Lambda(x)|\leqslant p(x)。$$

§3.17 **凸集分离定理** 设$X$是局部凸空间，$C$是$X$的闭凸子集，且$y\in X\setminus C$，则存在$X$上的连续线性泛函$\Lambda$满足

$$\operatorname{Re}\Lambda(y)>\sup\operatorname{Re}\Lambda(C)=\sup_{x\in C}\operatorname{Re}\Lambda(x)。$$

§3.18 **定理** 完备的局部凸空间中，紧集的闭凸包是紧集。

集合$A$的闭凸包是指$A$的凸包$\operatorname{Co}A$的闭包$\overline{\operatorname{Co}}A$，它是包含$A$的最小闭凸集。

## 第四节 象集上的半范

§4.1 **定义** 设$A$是非空指标集，$\forall\alpha\in A$，$X_\alpha$是一线性空间，$P_\alpha$是$X_\alpha^s$的非空子集，即是一族$X_\alpha$上的半范，$X$也是线性空间。$h_\alpha:X_\alpha\mapsto X$是线性算子，又设

$$X=\operatorname{span}[\bigcup_{\alpha\in A}h_\alpha(X_\alpha)]$$

$$\left(\operatorname{span}(E)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i:n\text{ 是自然数},\ \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\boldsymbol{K},x_1,\cdots,x_n\in X\right\}\right)$$

对所有的$p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\prod_{\alpha\in A}P_\alpha$，定义

$\hat{p}:X\mapsto\boldsymbol{R}$如下：对$x\in X$，

$$\hat{p}(x)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{k}p_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}):\ k\text{ 是自然数},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k\in A,x_{\alpha_i}\in X_{\alpha_i},\sum_{i=1}^{k}h_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})=x\right\}。$$

§4.2 **引理** ① $\hat{p}$是$X$上的半范。

② $\forall\alpha\in A$，$\hat{p}h_\alpha\leqslant p_\alpha$。

③ 如$q\in X^s$，且$\forall\alpha\in A,qh_\alpha\leqslant p_\alpha$，则$q\leqslant\hat{p}$。

［证］ ① 显然，对所有的 $x\in X$，$\hat{p}(x)$ 是有定义的，且 $\hat{p}(x)\geqslant 0$。设 $x,y\in X$，

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in A,\ \sum_{i=1}^{k}h_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})=x,$$

$$\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_l\in A,\sum_{i=k+1}^{l}h_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})=y,$$

其中 $x_{\alpha_i}\in X_{\alpha_i}$，$1\leqslant i\leqslant l$，则有

$$\sum_{i=1}^{l}h_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})=x+y,$$

所以
$$\hat{p}(x+y)\leqslant\sum_{i=1}^{l}p_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}p_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})+\sum_{i=k+1}^{l}p_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})。$$

对右端取 inf，$\hat{p}(x+y)\leqslant\hat{p}(x)+\hat{p}(y)$。

同样可证，$\forall\lambda\in\boldsymbol{K}$，$\hat{p}(\lambda x)=|x|\hat{p}(x)$。

② 如 $x_\alpha\in X_\alpha$，则 $\hat{p}(h_\alpha(x_\alpha))\leqslant p_\alpha(x_\alpha)$，即 $\hat{p}h_\alpha\leqslant p_\alpha$。

③ 设 $q\in X^s$，且 $\forall\alpha\in A$，$qh_\alpha\leqslant p_\alpha$，如 $x=\sum_{i=1}^{k}h_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})\in X$，

则 $q(x)\leqslant\sum_{i=1}^{k}qh_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})\leqslant\sum_{i=1}^{k}p_{\alpha_i}(x_{\alpha_i})$，

右端取 inf，$q(x)\leqslant\hat{p}(x)$，

所以 $q\leqslant\hat{p}$。

§4.3 系 设 $X_1,X_2$ 是线性空间，$X_1\subset X_2$，$p_1\in X_1^s$，$p_2\in X_2^s$，且 $p_1\leqslant p_2|_{X_1}$，则有

① $\exists r\in X_2^s$，$r=\max\{q\in X_2^s:q|_{X_1}\leqslant p_1,\ q\leqslant p_2\}$；

② $r|_{X_1}=p_1$；

③ $\forall w\in X_2$，$r(w)\geqslant\inf p_2(w-X_1)=\inf\limits_{x\in X_1}p_2(w-x)$。

［证］ 取 $A=\{1,2\}$，$X=X_2$，

$h_1$ 是 $X_1 \hookrightarrow X_2$ 的包含映射，
$h_2$ 是 $X_2 \hookrightarrow X_2$ 的恒等映射。

$\forall y \in X_2$，定义

$r(y) = \inf\{p_1(x_1) + p_2(x_2): x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_1 + x_2 = y\}$，

① 由引理 4.2②、③ 推出。

② 如 $y \in X_1$，且 $y = x_1 + x_2$，$x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，则有 $x_2 \in X_1$；
所以 $p_1(y) \leqslant p_1(x_1) + p_1(x_2) \leqslant p_1(x_1) + p_2(x_2)$（因 $p_1 \leqslant p_2|_{X_1}$）。

右端取 inf，$p_1(y) \leqslant r(y)$，
所以 $p_1 \leqslant r|_{X_1}$，
由①，$r|_{X_1} \leqslant p_1$，
所以 $r|_{X_1} = p_1$。②得证。

③ 最后，如 $x_1 \in X_1$，$x_2 \in X_2$，且 $x_1 + x_2 = w$，则

$$p_1(x_1) + p_2(x_2) \geqslant p_2(x_2) = p_2(w - x_1)$$
$$\geqslant \inf p_2(w - X_1)，$$

左端取 inf，$r(w) \geqslant \inf p_2(w - X_1)$。

§4.4 **定义** 按定义 4.1 的记号，记
$$\hat{P} = \{\hat{p}: p \in \prod_{\alpha \in A} P_\alpha\} \subset X^s。$$

§4.5 **定理** 按定义 4.1、4.4、3.4 的记号，$H(\hat{P})$ 表 $\hat{P}$ 的可传包，

① $\forall \alpha \in A$，$h_\alpha$ 是 $(P_\alpha, \hat{P})$ 连续的。

② $\forall \alpha \in A$，$h_\alpha$ 是 $(P_\alpha, H(\hat{P}))$ 连续的。

且 $H(\hat{P}) = \cup\{H \subset X^s: H$ 可传，$\forall \alpha \in A, h_\alpha$ 是 $(P_\alpha, H)$ 连续的$\}$。

［证］ ① 由引理 4.2 ②。

② 由 ① 和定义 3.4，即 $\forall \alpha \in A$，$h_\alpha$ 是 $(P_\alpha, H(\hat{P}))$ 连续的。

最后，设 $H$ 是 $X^s$ 的可传子集，且 $\forall \alpha \in A$，$h_\alpha$ 是 $(P_\alpha, H)$ 连

续的。$\forall q\in H$，$\forall \alpha\in A$，由 $h_\alpha$ 是 $(P_\alpha,H)$ 连续的定义，$\exists p_\alpha\in P_\alpha$，使 $qh_\alpha\leqslant p_\alpha$；令 $p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$，定义 $\hat{p}\in\hat{P}$。

由引理 4.2③，$q\leqslant\hat{p}$，故 $q\in H(\hat{P})$，所以 $H\subset H(\hat{P})$。②得证。

§4.6 **定理** 设 $X,X_\alpha,P_\alpha,h_\alpha$，$\hat{P}$ 如定义 4.1、4.4 中所表示的，设 $Y$ 是线性空间，$Q$ 是 $Y^s$ 的非空子集(即一族 $Y$ 上的半范)，且 $T:X\to Y$ 是线性算子，则 $T$ 是 $(\hat{P},Q)$ 连续的充分必要条件是：对所的 $\alpha\in A,Th_\alpha$ 是 $(P_\alpha,Q)$ 连续的。

[**证**] $T$ 是 $(\hat{P},Q)$ 连续的$\Longleftrightarrow\forall q\in Q,\exists p\in\prod\limits_{\alpha\in A}P_\alpha$，使得 $qT\leqslant\hat{p}$。

但 $qT$ 是 $X$ 上半范，故由引理 4.2②、③，前面的式子等价于：

$\forall q\in Q$，$\exists p\in\prod\limits_{\alpha\in A}P_\alpha$，使 $\forall\alpha\in A$，有 $(qT)h_\alpha\leqslant p_\alpha$；即

$\forall q\in Q$，$\exists p\in\prod\limits_{\alpha\in A}P_\alpha$，使 $\forall\alpha\in A$，有 $q(Th_\alpha)\leqslant p_\alpha$；即

$\forall q\in Q$；$\forall\alpha\in A$，$\exists p_\alpha\in P_\alpha$，使得 $q(Th_\alpha)\leqslant p_\alpha$；此即

$\forall\alpha\in A$；$Th_\alpha$ 是$(P_\alpha,Q)$连续的。

§4.7 **定理** 设 $X,X_\alpha,P_\alpha$，$h_\alpha,\hat{P}$ 如定义 4.1、4.4 所示，$q\in X^s$，则：

$$q\in H(\hat{P})\Longleftrightarrow\forall\alpha\in A,\ q\circ h_\alpha\in H(P_\alpha)。$$

[**证**] 如 $q\in H(\hat{P})$，则存在 $p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $q\leqslant\hat{p}$。由引理 4.2②，

$$\forall\alpha\in A,\ q\circ h_\alpha\leqslant\hat{p}\circ h_\alpha\leqslant p_\alpha,$$

所以 $q\circ h_\alpha\in H(P_\alpha)$。

另一方面，如果 $\forall\alpha\in A$，$q\circ h_\alpha\in H(P_\alpha)$。取 $p_\alpha\in P_\alpha$，使 $q\circ h_\alpha\leqslant p_\alpha$。令 $p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$，由引理 4.2③，$q\leqslant\hat{p}$，所以 $q\in H(\hat{P})$。

§4.8 **定理** ① 设 $X_\alpha,P_\alpha,h_\alpha,\hat{P}$ 如定义 4.1、4.4 所示，即

$\hat{P}$是由$\{X_\alpha,P_\alpha,h_\alpha\}_{\alpha\in A}$所定义的，也可记为$\hat{P}_A$；

② 设指标集$A$上有半序关系$\leqslant$，且此关系满足条件：

$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow$存在线性映射$h_{\beta\alpha}:X_\alpha\mapsto X_\beta$，使$h_{\beta\alpha}$是$(P_\alpha,P_\beta)$连续的，且$h_\beta\circ h_{\beta\alpha}=h_\alpha$；

③ 又设$A$的子集$B$满足：$\forall\alpha\in A,\exists\beta\in B$，使$\alpha\leqslant\beta$(即$B$是$A$的共尾子集)。

$\hat{P}_B$是由$\{X_\beta,P_\beta,h_\beta\}_{\beta\in B}$定义的；则$H(\hat{P}_B)=H(\hat{P})$(即$H(\hat{P}_A)$)。

〔证〕 $\forall\alpha\in A$，由假设，$\exists\beta\in B$，$\alpha\leqslant\beta$，且$h_{\beta\alpha}$是$(P_\alpha,P_\beta)$连续的。由定理4.5①，$h_\beta$是$(P_\beta,\hat{P}_B)$连续的，故$h_\alpha=h_\beta\circ h_{\beta\alpha}$是$(P_\alpha,\hat{P}_B)$连续的，因而是$(P_\alpha,H(\hat{P}_B))$连续的。由定理4.5②，$H(\hat{P}_B)\subset H(\hat{P})$。

因$B\subset A$，易知$H(\hat{P}_B)\supset H(\hat{P})$。

所以 $H(\hat{P}_B)=H(\hat{P})$。

§4.9 **注** 设$X$是线性空间，$\forall\alpha\in A,X_\alpha$是$X$的线性子空间，且$X=\operatorname{span}\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha$，又设$\forall\alpha\in A,P_\alpha$是$X_\alpha^*$的非空子集，且$X_\alpha\subset X_\beta\Rightarrow\forall q\in P_\beta,\exists p\in P_\alpha$，使得$q|_{X_\alpha}\leqslant p$；

则定义$\alpha\leqslant\beta$当且仅当$X_\alpha\subset X_\beta$，$h_\alpha$即是$X_\alpha\mapsto X$的包含映射，$h_{\beta\alpha}$即是$X_\alpha\mapsto X_\beta$包含映射。这样定义的半序关系$\leqslant$和$h_\alpha,h_{\beta\alpha}$满足定理4.8的条件。

## 第五节 归纳限局部凸空间

§5.1 **引理** 按定义4.1、4.4的记号，如果每一个$P_\alpha$是$X$的半范基，则$\hat{P}$是$X$的半范基。

〔证〕 设$\hat{p},\hat{p}'\in\hat{P}$，则$p=\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\prod_{\alpha\in A}P_\alpha$，$p'=\{p'_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\prod_{\alpha\in A}P_\alpha$，$p_\alpha,p'_\alpha\in P_\alpha$，由于$P_\alpha$是半范基，$\exists p''_\alpha\in P_\alpha,p''_\alpha\geqslant p_\alpha\vee p'_\alpha$，

即 $p''_\alpha \geqslant p_\alpha$，$p''_\alpha \geqslant p'_\alpha$。令 $p''=\{p''_\alpha\}_{\alpha\in A}\in\prod\limits_{\alpha\in A}P_\alpha$，则 $\hat{p}''\in\hat{P}$。由引理 4.2②，$\forall\alpha\in A$，$\hat{p}h_\alpha\leqslant p_\alpha\leqslant p''_\alpha$，用引理 4.2③，$\hat{p}\leqslant\hat{p}''$，同理 $\hat{p}'\leqslant\hat{p}''$，所以 $\hat{p}''\geqslant\hat{p}\vee\hat{p}'$。

类似的，可证：如 $\hat{p}\in\hat{P}$，$\lambda>0$，则 $\exists\hat{q}\in\hat{P}$，使 $\hat{q}\geqslant\lambda\hat{p}$。

所以 $\hat{P}$ 是 $X$ 的半范基。

§5.2 **定义** 设 $X$ 是线性空间，$\forall\alpha\in A$，$X_\alpha$ 是 $X$ 的线性子空间，且 $X=\mathrm{span}\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$，且 $\forall\alpha\in A$，$(X_\alpha,H(P_\alpha))$ 是局部凸空间，按 §4.4，定义 $\hat{P}=\{\hat{p}:p\in\prod\limits_{\alpha\in A}P_\alpha\}$，把 $H(\hat{P})$ 简记成 $H$，由引理 5.1，$(X,H)$ 是局部凸空间。又设

① 如 $X_\alpha\subset X_\beta$，则 $X_\beta$ 在 $X_\alpha$ 上导出的子拓扑弱于 $X_\alpha$ 的原拓扑，即包含映射

$h_{\beta\alpha}:X_\alpha\hookrightarrow X_\beta$ 是连续的；

② $\forall\alpha\in A$，$\forall\beta\in A$，$\exists\gamma\in A$，使得 $X_\alpha\cup X_\beta\subset X_\gamma$，此即子空间族 $\{X_\alpha:\alpha\in A\}$ 按包含关系"$\subset$"是定向集，由此 $X=\bigcup\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$，

则 $(X,H)$ 称为由子空间族 $\{(X_\alpha,H(P_\alpha)):\alpha\in A\}$ 定义的**归纳限局部凸空间**，$(X,H)$ 上的拓扑称为归纳限拓扑。

§5.3 **定理** 设 $(X,H)$ 是由子空间族 $\{(X_\alpha,H(P_\alpha)):\alpha\in A\}$ 定义的归纳限局部凸空间，则有以下性质：

① $\forall\alpha\in A$，$(X,H)$ 在 $X_\alpha$ 上导出的子拓扑弱于 $X_\alpha$ 的原拓扑，即包含映射

$h_\alpha:X_\alpha\hookrightarrow X$ 是连续的。

而且 $H$ 是满足以上条件的最强局部凸拓扑。

② 如 $(Y,G)$ 是局部凸空间，且

$T:X\to Y$ 是线性映射，

则 $T$ 是 $(H,G)$ 连续的充分必要条件是：$\forall\alpha\in A$，$T|_{X_\alpha}$ 是 $(P_\alpha,G)$ 连续的。

③ 如 $B$ 是 $A$ 的共尾子集，则$(X,H)$等于由子空间族$\{(X_\beta, H(P_\beta)):\beta\in B\}$定义的归纳限局部凸空间。

④ 如果 $q\in X^*$，则 $q\in H$ 的充分必要条件是：$\forall\alpha\in A$，$q|_{X_\alpha}\in H(P_\alpha)$。

［证］ ① 由定理 4.5②。

② 由定理 4.6。

③ 由定理 4.8。

④ 由定理 4.7。

§5.4 **定理** 设 $X_1$ 是线性空间 $X_2$ 的线性子空间，$H_2$ 是 $X_2$ 上的半范系，令

$$H_2|_{X_1}=\{p|_{X_1}\in X_1^*:p\in H_2\},$$

则 $H_2|_{X_1}$ 是 $X_1$ 上的半范系，且局部凸空间$(X_2,H_2)$在 $X_1$ 上导出的子拓扑空间即是局部凸空间$(X_1,H_2|_{X_1})$。

［证］ 设 $p_1,p_1'\in H_2|_{X_1}$，则 $\exists p_2,p_2'\in H_2$，使 $p_1=p_2|_{X_1}$，$p_1'=p_2'|_{X_1}$，则$p_1\vee p_1'=(p_2\vee p_2')|_{X_1}\in H_2|_{X_1}$，因 $p_2\vee p_2'\in H_2$。

同理，对 $\lambda>0$，$\lambda p_1\in H_2|_{X_1}$。

$\forall p_1''\in X_1^*$，如 $p_1''\leqslant p_1=p_2|_{X_1}$，则由系 4.3①、②，$\exists r\in X_2^*$，$r\leqslant p_2$，$r|_{X_1}=p_1''$。因 $p_2\in H_2$，所以 $r\in H_2$，$p_1''\in H_2|_{X_1}$。由此证明了 $H_2|_{X_1}$ 是 $X_1^*$ 的可传子集，所以 $H_2|_{X_1}$ 是半范系。

按子拓扑的定义，$X_2$的局部基中的邻域$\{x\in X_2:p_2(x)<1\}$（其中 $p_2\in H_2$）与 $X_1$ 之交即为 $X_1$ 的相对拓扑的局部基的邻域。$\forall p_2\in H_2$，

$$\{x\in X_2:p_2(x)<1\}\cap X_1=\{x\in X_1:p_2|_{X_1}(x)<1\},$$

所以$(X_1,H_2|_{X_1})$与 $X_1$ 由$(X_2,H_2)$导出的子拓扑空间相同。

**系** 如果 $P_2$ 是 $X_2$ 上的半范基，令

$$P_1=P_2|_{X_1}=\{p|_{X_1}\in X_1^*:p\in P_2\},$$

则 $P_1$ 是 $X_1$ 的半范基，局部凸空间$(X_1,H(P_1))$即是局部凸空

间$(X_2, H(P_2))$在$X_1$上导出的子拓扑空间。

§5.5 **定理** 设$X_1, X_2$是线性空间，$X_1 \subset X_2$，$H_i$是$X_i$上的半范系，$i=1,2$。$(X_1, H_1)$，$(X_2, H_2)$是局部凸空间，则

① $X_2$的拓扑在$X_1$上导出的子拓扑弱于$X_1$的原拓扑当且仅当$H_1 \supset H_2|_{X_1}$。

② $X_2$的拓扑在$X_1$上导出的子拓扑等于$X_1$的原拓扑当且仅当$H_1 = H_2|_{X_1}$。

［证］ ① 由定理5.4，$(X_2, H_2)$在$X_1$上导出的子拓扑空间为$(X_1, H_2|_{X_1})$。$(X_1, H_2|_{X_1})$弱于$(X_1, H_1) \Longleftrightarrow$恒等映射$I:(X_1, H_1) \mapsto (X_1, H_2|_{X_1})$连续$\Longleftrightarrow \forall p_2 \in H_2$，$\exists p_1 \in H_1$，使$p_2|_{X_1} \leqslant p_1 \Longleftrightarrow \forall p_2 \in H_2$，$p_2|_{X_1} \in H_1 \Longleftrightarrow H_2|_{X_1} \subset H_1$。

② $(X_1, H_2|_{X_1})$等于$(X_1, H_1) \Longleftrightarrow H_2|_{X_1} \subset H_1$，且$\forall p_1 \in H_1$，$\exists p_2 \in H_2$，使$p_1 \leqslant p_2|_{X_1} \Longleftrightarrow H_2|_{X_1} \subset H_1$，且$H_1 \subset H_2|_{X_1}$（因$H_2|_{X_1}$是可传的）$\Longleftrightarrow H_2|_{X_1} = H_1$。

注：如果把半范系$H_i$换成半范基$P_i$，则定理的结论不成立。

## 第六节 子空间序列的严格归纳限

§6.1 **定义** 设$\mathcal{N}$表自然数集，$\forall n \in \mathcal{N}$，$X_n$是线性空间$X$的线性子空间，且

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots, X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

又设$P_n$是$X_n$上半范系，$(X_n, P_n)$是局部凸空间，且$X_{n+1}$的拓扑在$X_n$上导出$X_n$的拓扑（即$X_{n+1}$在$X_n$上的子拓扑等于$X_n$的原拓扑）；则由$\{(X_n, P_n): n \in \mathcal{N}\}$定义的归纳限局部凸空间$(X, H)$称为**严格归纳限**。

§6.2 **引理** 设$(X, H)$是$\{(X_n, P_n): n \in \mathcal{N}\}$的严格归纳限（其中$P_n$是半范系），设$n_0 \in \mathcal{N}$，$p_{n_0} \in P_{n_0}$，则$\exists q \in H$，使

$q|_{X_{n_0}}=p_{n_0}$。

［证］ 如 $m<n_0$，取 $p_m=p_{n_0}|_{X_m}$，则 $p_m\in P_m$。由定理5.5，可用数学归纳法找到 $p_{n_0+1}\in P_{n_0+1}$，$p_{n_0+2}\in P_{n_0+2}$，…使

$$\forall m\geqslant n_0, p_{m+1}|_{X_m}=p_m,$$

由 $\{p_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ 按定义 4.1 定义 $\hat{p}\in\hat{P}\subset H$。

设 $x\in X_{n_0}$，$k\in\mathcal{N}$，$n_1,\cdots,n_k\in\mathcal{N}$，$\sum\limits_{i=1}^{k}x_{n_i}=x$，$x_{n_i}\in X_{n_i}$，记 $L=\max\{n_1,\cdots,n_k\}$，则

$$\sum_{i=1}^{k}p_{n_i}(x_{n_i})=\sum_{i=1}^{k}p_L(x_{n_i})\geqslant p_L\left(\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\right)=p_L(x)=p_{n_0}(x),$$

左边取下确界，$\hat{p}(x)\geqslant p_{n_0}(x)$，即

$$\hat{p}|_{X_{n_0}}\geqslant p_{n_0},$$

由引理 4.2②，$\hat{p}|_{X_{n_0}}\leqslant p_{n_0}$，

所以 $\hat{p}|_{X_{n_0}}=p_{n_0}$。

以上的 $\hat{p}$ 即所求的 $q$。

§6.3 **定理** 如 $(X,H)$ 是 $\{X_n,P_n):n\in\mathcal{N}\}$ 的严格归纳限，则 $X$ 的拓扑在每个 $X_n$ 上导出 $X_n$ 的拓扑。

［证］ 由定理 5.3①，$\forall q\in H$，$q|_{X_n}=q\circ h_n$ 是 $X_n$ 上连续半范，所以 $q|_{X_n}\in P_n$（因 $P_n$ 是半范系），因此 $\{q|_{X_n}:q\in H\}\subset P_n$。

由引理 6.2，$P_n\subset\{q|_{X_n}:q\in H\}$，所以

$$P_n=\{q|_{X_n}:q\in H\}。$$

由定理 5.5 推出，$X$ 的拓扑在 $X_n$ 上导出 $X_n$ 的拓扑。

§6.4 **定理** 如 $(X,H)$ 是 $\{(X_n,P_n):n\in\mathcal{N}\}$ 的严格归纳限，且每一个 $(X_n,P_n)$ 是 $T_2$ 的，则 $(X,H)$ 也是 $T_2$ 的。

［证］ 由 §3.15 和引理 6.2。

§6.5 **定理** 设 $(X,H)$ 是 $\{(X_n,P_n):n\in\mathcal{N}\}$ 的严格归纳限，且 $\forall n\in\mathcal{N}$，$X_n$ 在 $X_{n+1}$ 中闭，设 $B\subset X$，则 $B$ 在 $(X,H)$ 中有界的充分必要条件是：存在某自然数 $n_0$，使 $B\subset X_{n_0}$，且 $B$ 在

$(X_{n_0}, P_n)$中有界。

［证］ 充分性：由定理 6.3 易推出。

必要性：只需证明：如 $B$ 在$(X,H)$ 中有界，则存在某自然数 $n_0$，使

$$B\subset X_{n_0} \tag{6.5.1}$$

用反证法。设 $B\subset X$，而对任一自然数 $n$,$B\not\subset X_n$,则存在自然数序列 $k_1<k_2<\cdots$,满足：

$$\forall n\geqslant 2,\ \exists x_n\in B,\ x_n\in X_{k_n}\setminus X_{k_{n-1}}。$$

把 $X_{k_n}$ 简记作 $F_n$,$P_{k_n}$ 简记作 $Q_n$，则

$\forall n\geqslant 2$，$F_{n-1}$ 在 $F_n$ 中闭，且

$$x_n/n\in F_n\setminus F_{n-1} \tag{6.5.2}$$

设 $r_1\in Q_1$，由假设存在 $s\in Q_2$，使 $r_1=s|_{F_1}$，由(6.5.2)，$\exists t\in Q_2$，使

$$\inf t(x_2/2-F_1)\geqslant 1,$$

即
$$\inf t(x_2-F_1)\geqslant 2,$$

令 $u=s\vee t$，则 $u\in Q_2$，且

$$r_1\leqslant u|_{F_1},\ \inf u(x_2-F_1)\geqslant 2,$$

由系 4.3，$\exists r_2\in Q_2$ 使

$r_2|_{F_1}=r_1$ 且 $r_2(x_2)\geqslant\inf u(x_2-F_1)\geqslant 2$，继续这种步骤，用数学归纳法得出，$\forall n\geqslant 2$，$\exists r_n\in Q_n$ 满足：

$$r_n|_{F_{n-1}}=r_{n-1} \text{ 且 } r_n(x_n)\geqslant n \tag{6.5.3}$$

由半范序列 $r=\{r_n\}_{n\in\mathcal{N}}\in\prod_{n=1}^{\infty}Q_n$，按定义 4.1 定义 $\hat{r}\in\hat{Q}$，由定理 4.8，

$$\hat{r}\in H(\hat{P})=H。$$

用引理 6.2 中所用的论证，得

$$\forall n\in\mathcal{N},\ \hat{r}|_{F_n}=r_n,$$

所以，由(6.5.3)，$\forall n\geqslant 2$,$\hat{r}(x_n)\geqslant n$，因此，$B$ 在 $(X,H)$ 中无

界，得出矛盾。所以(6.5.1)得证。

§6.6 **引理** 设$(X,H)$是$\{(X_n,P_n):n\in\mathcal{N}\}$的严格归纳极限，$(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$是$(X,H)$中的Cauchy网，则

① $\exists l\in\mathcal{N}$，使$\forall p\in H$，$\forall\gamma\in\Gamma$，$\exists\delta=\delta(p,\gamma)\geqslant\gamma$和$\exists z=z(p,\gamma)\in X_l$，满足：

$$p(y_{\delta(p,\gamma)}-z(p,\gamma))<1/3;$$

② $(z(p,\gamma))_{(p,\gamma)\in H\times\Gamma}$是$(X_l,P_l)$中的Cauchy网，其中$H\times\Gamma$中的定向"$\leqslant$"定义如下：如$(p_1,\gamma_1)$，$(p_2,\gamma_2)\in H\times\Gamma$，$(p_1,\gamma_1)\leqslant(p_2,\gamma_2)$当且仅当$p_1\leqslant p_2$，$\gamma_1\leqslant\gamma_2$。

［证］ ① 用反证法，如①不成立，则$\forall n\in\mathcal{N}$，$\exists p=p(n)\in H$，$\exists\gamma=\gamma(n)\in\Gamma$，使得$\forall\delta\geqslant\gamma$，$\forall z\in X_n$，有$p(y_\delta-z)\geqslant1/3$。

因此可用数学归纳法找到半范序列$p^{(1)},p^{(2)},\cdots\in H$，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots\in\Gamma$，使得

$$\forall n\in\mathcal{N},\ p^{(n+1)}\geqslant p^{(n)}$$

且当 $\delta\geqslant\gamma_n$，$\inf p^{(n)}(y_\delta-X_n)\geqslant1/3$ (6.6.1)

令$q_n=p^{(n)}|_{X_n}$，则由定理6.3，$q_n\in P_n$，由半范序列$q=\{q_n\}_{n\in\mathcal{N}}\in\prod\limits_{n=1}^{\infty}P_n$，按定义4.1定义$\hat{q}$，则$\hat{q}\in H$。

因$(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$是$(X,H)$中Cauchy网，对$\hat{q}\in H$，$\exists\eta\in\Gamma$，使得当$\gamma\geqslant\eta$，$\hat{q}(y_\gamma-y_\eta)<1/3$，因$y_\eta\in X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$，故$\exists m\in\mathcal{N}$使

$$y_\eta\in X_m \tag{6.6.2}$$

再取 $\delta\in\Gamma$ 使 $\delta\geqslant\eta,\delta\geqslant\gamma_m$ (6.6.3)

因$\delta\geqslant\eta$，$\hat{q}(y_\delta-y_\eta)<1/3$，所以$\exists x_{n_i}\in X_{n_i}$，$i=1,\cdots,k$，使

$$y_\delta-y_\eta=\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\text{，且}\sum_{i=1}^{k}q_{n_i}(x_{n_i})<1/3,$$

因而

$$y_\delta-y_\eta=\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\text{ 且}\sum_{i=1}^{k}p^{(n_i)}(x_{n_i})<1/3 \tag{6.6.4}$$

现 $y_\delta - y_\eta - \sum_{n_i<m} x_{n_i} = \sum_{n_i>m} x_{n_i}$,

所以 $p^{(m)}(y_\delta - (y_\eta + \sum_{n_i<m} x_{n_i})] = p^{(m)}(\sum_{n_i>m} x_{n_i})$

$$\leqslant \sum_{n_i>m} p^{(m)}(x_{n_i}) \leqslant \sum_{n_i>m} p^{(n_i)}(x_{n_i}) < 1/3,$$

(因 $p^{(m)} \leqslant p^{(m+1)} \leqslant \cdots$,并用(6.6.4)式)。

另一方面,由(6.6.3),$\delta \geqslant \gamma_m$,由(6.6.2),$y_\eta \in X_m$,所以

$p^{(m)}(y_\delta - (y_\eta + \sum_{n_i<m} x_{n_i})) \geqslant \inf p^{(m)}(y_\delta - X_m) \geqslant 1/3$,(由(6.6.1)式)

此矛盾证明了①成立。

② 由①中已得到 $l$,设 $\forall p \in P_l$,由引理 6.2,$\exists q \in H$,使

$$q|_{X_l} = p \tag{6.6.5}$$

因 $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 是 Cauchy 网,所以 $\exists \eta \in \Gamma$,使得

当 $$\gamma_1, \gamma_2 \geqslant \eta,\ q(y_{\gamma_1} - y_{\gamma_2}) < 1/3 \tag{6.6.6}$$

如 $(s_1, \gamma_1)$,$(s_2, \gamma_2) \in H \times \Gamma$;对 $i = 1, 2$,$(s_i, \gamma_i) \geqslant (q, \eta)$,即 $s_i \geqslant q$,$\gamma_i \geqslant \eta$,由①,对 $i = 1, 2$,

$\exists \delta(s_i, \gamma_i) \geqslant \gamma_i$,$\exists z(s_i, \gamma_i) \in X_l$,且

$$s_i(y_{\delta(s_i,\gamma_i)} - z(s_i, \gamma_i)) < 1/3,$$

故对 $i = 1, 2$,

$\delta(s_i, \gamma_i) \geqslant \eta$,且 $q(y_{\delta(s_i,\gamma_i)} - z(s_i, \gamma_i)) < 1/3$,由(6.6.6),

$q(y_{\delta(s_1,\gamma_1)} - y_{\delta(s_2,\gamma_2)}) < 1/3$,

用三角形不等式,

$$\begin{aligned} q(z(s_1,\gamma_1) - z(s_2,\gamma_2)) &\leqslant q(z(s_1,\gamma_1) - y_{\delta(s_1,\gamma_1)}) \\ &+ q(y_{\delta(s_1,\gamma_1)} - y_{\delta(s_2,\gamma_2)}) + q(y_{\delta(s_2,\gamma_2)} - z(s_2,\gamma_2)) \\ &< 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1。\end{aligned}$$

由 $z(s_1,\gamma_1), z(s_2,\gamma_2) \in X_l$ 及(6.6.5)式

得 $$p(z(s_1,\gamma_1) - z(s_2,\gamma_2)) < 1。$$

所以 $(z(p,\gamma))_{(p,\gamma)\in H\times\Gamma}$ 是 $(X_l,P_l)$ 中的 Cauchy 网。

§6.7 **定理** 设 $(X,H)$ 是 $\{(X_n,P_n):n\in\mathcal{N}\}$ 的严格归纳限，且 $\forall n\in\mathcal{N}$，$(X_n,P_n)$ 是完备的，则 $(X,H)$ 是完备的。

［证］ 设 $(y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 是 $(X,H)$ 中任一个 Cauchy 网，由引理 6.6，可选取 $l$ 以及 $\{z(p,\gamma)\}_{(p,\gamma)\in H\times\Gamma}$ 是 $(X_l,P_l)$ 中 Cauchy 网，由假设，$(X_l,P_l)$ 完备，$\exists w\in X_l$ 使在 $(X_l,P_l)$ 中，$z(p,\gamma)\to w$，由定理 5.3①，在 $(X,H)$ 中，$z(p,\gamma)\to w$。

所以，$\forall t\in H$，$\exists(q,\eta_1)\in H\times\Gamma$ 使得当 $(p,\gamma)\in H\times\Gamma$，$(p,\gamma)\geqslant(q,\eta_1)$ 时，有

$$t(z(p,\gamma)-w)<1/3 \tag{6.7.1}$$

且 $\exists\eta_2\in\Gamma$，使得当 $\gamma\geqslant\eta_2,\delta\geqslant\eta_2$ 时，

$$t(y_\gamma-y_\delta)<1/3 \tag{6.7.2}$$

令 $\bar{p}=t\vee q\in H$，且取 $\eta\in\Gamma$ 使 $\eta\geqslant\eta_1$，$\eta\geqslant\eta_2$ 则当 $\gamma\geqslant\eta$，$(\bar{p},\gamma)\geqslant(q,\eta_1)$，由 (6.7.1)，

$$t(z(\bar{p},\gamma)-w)<1/3 \tag{6.7.3}$$

由引理 6.6①，$\exists\delta(\bar{p},\gamma)\geqslant\gamma\geqslant\eta_2$，故由 (6.7.2) 式，

$$t(y_\gamma-y_{\delta(\bar{p},\gamma)})<1/3 \tag{6.7.4}$$

因 $t\leqslant\bar{p}$，由引理 6.6①，$\exists z(\bar{p},\gamma)\in X_l$，

$$t(y_{\delta(\bar{p},\gamma)}-z(\bar{p},\gamma))\leqslant\bar{p}(y_{\delta(\bar{p},\gamma)}-z(\bar{p},\gamma))<1/3 \tag{6.7.5}$$

用三角形不等式，当 $\gamma\geqslant\eta$，由 (6.7.4)、(6.7.5)、(6.7.3)，

$$t(y_\gamma-w)\leqslant t(y_\gamma-y_{\delta(\bar{p},\gamma)})+t(y_{\delta(\bar{p},\gamma)}-z(\bar{p},\gamma))$$
$$+t(z(\bar{p},\gamma)-w)<1/3+1/3+1/3=1。$$

所以 $y_\gamma\to w$。证毕。

## 第七节 $C^\infty(\Omega)$ 和 $D_k(\Omega)$

### §7.1 记号和术语

设 $\boldsymbol{R}^d$ 是 $d$ 维欧氏空间，$x=(x_1,\cdots,x_d)$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中的变元，它

的范数记为

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}。$$

设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ 是 $d$ 重非负整数，其中 $\alpha_i, 1 \leqslant i \leqslant d$ 是非负整数，$\boldsymbol{N}$ 表示非负整数集，$\boldsymbol{N}^d$ 是由所有 $d$ 重非负整数 $\alpha$ 组成的集合。对 $\alpha \in \boldsymbol{N}^d$，记

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d。$$

若 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{N}^d$，定义

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_d + \beta_d)。$$

定义 $\alpha \leqslant \beta$，当且仅当 $\alpha_i \leqslant \beta_i$，$1 \leqslant i \leqslant d$。

记 $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_d}{\beta_d}$$

$$= \frac{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_d!}{\beta_1!\cdots\beta_d!(\alpha_1-\beta_1)!\cdots(\alpha_d-\beta_d)!}$$

若 $x \in \boldsymbol{R}^d$，$\alpha \in \boldsymbol{N}^d$，$x^\alpha$ 表示 $x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$。$d$ 个变元 $(x_1, \cdots, x_d)$ 的次数 $\leqslant n$ 的多项式 $P$ 可写成

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \lambda_\alpha x^\alpha，其中 \lambda_\alpha \in \boldsymbol{K}。$$

$D_i$ 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_d)^{\alpha_d}}。$$

对多项式 $P$，$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant n} \lambda_\alpha D^\alpha$。

设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中非空开集，$C^m(\Omega)$ 是所有定义在 $\Omega$ 内的具有直到 $m$ 阶连续偏导数的复值函数组成的线性空间。$C^\infty(\Omega)$ 是所有定义在 $\Omega$ 内的具有任意阶导数的复值函数组成的线性空间。

显然 $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$，其中 $C^0(\Omega) = C(\Omega)$。$C^\infty(\Omega)$ 的元素称为 $\Omega$ 上无穷可微函数或 $C^\infty$ 函数。

如 $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，$N$ 是非负整数，$f \in C^\infty(\Omega)$，记

$$p_{N,K}(f)=\max_{|\alpha|\leqslant N}\sup_{x\in K}|D^\alpha f(x)|=\max_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha f\|_K,$$

其中$\|\varphi\|_K=\sup_{x\in K}|\varphi(x)|$，则 $p_{N,K}$ 是 $C^\infty(\Omega)$上的半范。

记 $P=\{Mp_{N,K}: M\in\mathcal{N}, N\in\boldsymbol{N}, K$为$\Omega$的紧子集$\}$(7.1,1) 则 $P$ 是 $C^\infty(\Omega)$上的半范基，$(C^\infty(\Omega),H(P))$是局部凸空间，简记作 $C^\infty(\Omega)$。

如果$x\in\Omega$,则单元集$\{x\}$是紧集，所有的映射 $f\mapsto D^\alpha f(x)$是 $C^\infty(\Omega)\mapsto\boldsymbol{C}$ 上的连续线性映射,即是连续线性泛函。

如果$(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 是 $C^\infty(\Omega)$中的网,且 $f\in C^\infty(\Omega)$,则 $f_\gamma\to f$ 等价于：

$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$,在 $\Omega$ 的任一紧子集上,$D^\alpha f_\gamma$ 一致收敛于 $D^\alpha f$，这称为在 $\Omega$ 上 $D^\alpha f_\gamma$ 紧一致收敛（或局部一致收敛）于 $D^\alpha f$，简记作

$$D^\alpha f_\gamma\to D^\alpha f \qquad \text{u.c.c.}$$

$(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 是 Cauchy 网等价于：

$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$, $D^\alpha f_\gamma$ 按 u.c.c. 是 Cauchy 网，即 $\forall\varepsilon>0$，对 $\Omega$ 的任一紧子集$K$,$\exists\gamma_0=\gamma_0(\varepsilon,\alpha,K)\in\Gamma$,当$\gamma_1\geqslant\gamma_0,\gamma_2\geqslant\gamma_0$, $\forall x\in K$,

$$|D^\alpha f_{\gamma_1}(x)-D^\alpha f_{\gamma_2}(x)|<\varepsilon。$$

所有的微分映射 $f\mapsto D^\alpha f$ 是 $C^\infty(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$ 中的连续线性映射。

§7.2 **引理** 设 $(f_\gamma)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中的网，$i\in\{1,\cdots,d\}$, $g$, $h_i\in C(\Omega)$，且

$$f_\gamma\to g \qquad \text{u.c.c.}$$

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\to h_i \qquad \text{u.c.c.}$$

则在 $\Omega$ 上 $h_i=\partial g/\partial x_i$。

［证］ 设任一$x\in\Omega$,取 $\delta>0$，使得闭球$\overline{B}(x,\delta)=\{y\in\boldsymbol{R}^d:\|y-x\|\leqslant\delta\}\subset\Omega$,记 $K=$闭区间$[x-\delta e_i, x+\delta e_i]$,其中$e_i$ 是第 $i$个

分量为 1 其余分量为 0 的 $d$ 维单位向量，即 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$；因 $K$ 是 $\Omega$ 中紧子集，

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\to h_i \text{ 在 } K \text{ 上一致成立，}$$

因而对所有 $t\in[-\delta,\delta]$，

$$f_\nu(x+te_i)-f_\nu(x)=\int_0^t\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}(x+se_i)\,ds\to\int_0^t h_i(x+se_i)ds,$$

所以 $g(x+te_i)-g(x)=\int_0^t h_i(x+se_i)ds$，如 $t\neq0$，上式除以 $t$，令 $t\to0$，用 $h_i$ 的连续性，得

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)=h_i(x)。$$

§7.3 **定理** $C^\infty(\Omega)$ 是完备的。

［**证**］ 设 $(f_\nu)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中的 Cauchy 网，则 $\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，$D^\alpha f_\nu$ 按紧一致收敛是 Cauchy 网，所以 $\exists g^\alpha\in C(\Omega)$，使

$$D^\alpha f_\nu\to g^\alpha \qquad \text{u.c.c.} \tag{7.3.1}$$

特别有 $f_\nu\to g^0=g^{(0,\cdots,0)}$ u.c.c.

且 $\forall i\in\{1,\cdots,d\}$，$\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\to g^{(0,\cdots,1,0,\cdots,0)}$ 在 $\Omega$ 中；

由引理 7.2，

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=g^{(0,\cdots,1,0,\cdots,0)} \text{ 在 } \Omega \text{ 中，}$$

对 $\alpha$ 用数学归纳法，易证：$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，

$D^\alpha g^{(0,\cdots,0)}=g^\alpha$ 在 $\Omega$ 中；

这样，由(7.3.1)式，$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，

$$D^\alpha f_\nu\to D^\alpha g^{(0,\cdots,0)} \qquad \text{u.c.c}$$

此即在 $C^\infty(\Omega)$ 中，$f_\nu\to g^0$。

§7.4 **定理** 按(7.1.1)式的记号，在 $P$ 中有可数个半范组

成半范基，生成的凸部凸空间即 $C^\infty(\Omega)=(C^\infty(\Omega),H(P))$。因而 $C^\infty(\Omega)$ 是可距离化的，且是完备的、赋不变距离的局部凸空间（称为 Fréchet 空间）。

［证］ 设 $K_1,K_2,\cdots$ 是 $\Omega$ 的紧子集序列，满足 $K_n\subset\text{int}K_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，且 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$。令 $q_n=p_{n,K_n}$。

如 $K$ 是 $\Omega$ 的任一紧子集，则 $\exists i_0$ 使

$$K\subset\text{int}K_{i_0}\subset K_{i_0},$$

如 $K$ 和 $n$ 已给定，令 $n_0=\max(n,i_0)$，则 $p_{n,k}\leqslant q_{n_0}$。

取 $P_1=\{nq_n:n\in\mathcal{N}\}$，则 $P_1$ 是半范基，且 $(C^\infty(\Omega),H(P_1))=(C^\infty(\Omega),H(P))$。由于 $C^\infty(\Omega)$ 在 $O$ 点有可数多个邻域 $\{B_p(1):p\in P_1\}$ 构成的邻域基，故 $C^\infty(\Omega)$ 可距离化，例如可定义距离如下：如 $f,g\in C^\infty(\Omega)$，令 $p_n=nq_n$，

$$d(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}。$$

显然此距离 $d$ 是平移不变的，由此不变距离 $d$ 定义的收敛是紧一致收敛，因而由 $d$ 产生的拓扑 $\tau_d$ 与由半范基定义的局部凸拓扑相同。由定理 7.3，$C^\infty(\Omega)$ 作为距离空间也是完备的。

§7.5 **定理** $C^\infty(\Omega)$ 中每一有界闭集是紧集（即 $C^\infty(\Omega)$ 是 Montel 空间，或称有 Heine-Borel 性质）。

［证］ 由定理 7.4，$C^\infty(\Omega)$ 可距离化，由于在距离空间中，紧集与自列紧集相同，只需证明 $C^\infty(\Omega)$ 中每一有界序列有收敛子序列。

设 $\{f_n\}$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中的有界序列，$K$ 是 $\Omega$ 的任一紧子集，且 $|\alpha|\leqslant N$，令 $L$ 是 $\Omega$ 的紧子集，且满足

$$K\subset\text{int}\,L\subset L\subset\Omega。$$

又设 $B_1,\cdots,B_m$ 是开球，且满足

$$K\subset B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m\subset L,$$

设 $k\in\{1,\cdots,m\}$，$\forall j\in\{1,\cdots,d\}$，$\forall x\in B_k,\forall n\in\mathcal{N}$，

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}D^\alpha f_n(x)\right|\leqslant p_{N+1,L}(f_n)\leqslant\sup_{n\geqslant 1}p_{N+1,L}(f_n)=M<\infty。$$

设 $h=(h_1,\cdots,h_d)\in\boldsymbol{R}^d,t\in\boldsymbol{R}$，对任意的 $x$，$x+h\in B_k$，

$$|D^\alpha f_n(x+h)-D^\alpha f_n(x)|=\left|\int_0^1\sum_{j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_j}D^\alpha f_n(x+th)h_j\,dt\right|$$

$$\leqslant p_{N+1,L}(f_n)\sum_{j=1}^d|h_j|\leqslant M\left(\sum_{j=1}^d|h_j|\right),$$

所以 $\{D^\alpha f_n:n\in\mathcal{N}\}$ 在 $B_k$ 上等度连续，因 $K\subset\bigcup_{i=1}^m B_i$，这函数序列也在 $K$ 上等度连续。由 Arzela-Ascoli 定理 $\{f_n\}$ 有子序列 $\{g_n\}$，使 $\{D^\alpha g_n\}$ 在 $K$ 上一致收敛。用 Cantor 的对角线程序，存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{\varphi_n\}$，使 $\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d,\forall i\in\mathcal{N}$，$\{D^\alpha\varphi_n\}$ 在 $K_i$ 上一致收敛，$K_i$ 如定理 7.4 的证明中所示，$\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty K_i,K_i\subset\text{int }K_{i+1}$。这样由定理 7.4，$\{\varphi_n\}$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列。由定理 7.3，$C^\infty(\Omega)$ 是完备的，$\{\varphi_n\}$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中收敛。

以上已证明了 $C^\infty(\Omega)$ 中每一有界序列有收敛子序列，故定理得证。

§7.6 **注意** 由定理 7.5，$C^\infty(\Omega)$ 不能赋范。因为如果赋范空间中单位球是紧的，则此空间即是有限维的。

§7.7 **引理** 如 $f,g\in C^\infty(\Omega)$，则

$$p_{N,K}(fg)\leqslant 2^N\,p_{N,K}(f)p_{N,K}(g)。$$

［证］ 因 $D^\alpha(fg)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta f\cdot D^{\alpha-\beta}g$，

$$p_{N,K}(fg)\leqslant p_{N,K}(f)\cdot p_{N,K}(g)\cdot\max_{|\alpha|\leqslant N}\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}$$

$$=p_{N,K}(f)\cdot p_{N,K}(g)\max_{|\alpha|\leqslant N,\ \beta_i\leqslant\alpha_i}\sum\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_d}{\beta_d}$$

$$= 2^N p_{N,K}(f) p_{N,K}(g)。$$

§7.8 **定理** 映射 $(f,g) \mapsto fg$ 是 $C^\infty(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \mapsto C^\infty(\Omega)$ 中的连续线性映射。

［证］ 因 $p_{N,K}(fg - f_0 g_0) \leqslant 2^N [p_{N,K}(f_0) p_{N,K}(g - g_0) + p_{N,K}(g_0) p_{N,K}(f - f_0) + p_{N,K}(f - f_0) p_{N,K}(g - g_0)]$。

当 $f_n \to f_0, g_n \to g_0$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中，则 $p_{N,K}(f_n - f_0) \to 0, p_{N,K}(g_n - g_0) \to 0$，因而 $p_{N,K}(f_n g_n - f_0 g_0) \to 0$，对所有 $N \in \mathbf{N}$，对所有 $\Omega$ 的紧子集 $K$ 均成立，所以 $f_n g_n \to f_0 g_0$，在 $C^\infty(\Omega)$ 中。

§7.9 **例** 设 $0 < a < b < \infty$，取 $\delta_0, \delta_1, \cdots > 0$，使

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = b - a, \text{记 } m_n = \frac{2^n}{\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_n},$$

令
$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{\delta_0}(x - a) & \text{当 } a < x < a + \delta_0, \\ 1 & \text{当 } x \geqslant a + \delta_0, \end{cases}$$

定义 $f_n$，由 $f_n(x) = \dfrac{1}{\delta_n} \displaystyle\int_{x-\delta_n}^{x} f_{n-1}(t) dt$，

所以 $Df_n(x) = f_n'(x) = \dfrac{1}{\delta_n} [f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x - \delta_n)]$，用数学归纳法可证，$D^n f_n$ 存在且连续，且

$$\|D^n f_n\| \leqslant \frac{2}{\delta_n} \|D^{n-1} f_{n-1}\| \leqslant \cdots \leqslant \frac{2^n}{\delta_1 \cdots \delta_n} \|f_0\| = m_n,$$

以上的范数为最大模范数，即

$$\|\varphi\| = \max_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)|。$$

如 $n > r > 1$，

$$|D^r f_n(x)| = \left| \frac{1}{\delta_n} (D^{r-1} f_{n-1}(x) - D^{r-1} f_{n-1}(x - \delta_n)) \right| \leqslant \|D^r f_{n-1}\|。 \quad (7.9.1)$$

（以上最后一不等式用中值定理）

所以 $\|D^r f_n\| \leqslant \|D^r f_{n-1}\| \leqslant \cdots \leqslant \|D^r f_r\| \leqslant m_r$。 (7.9.2)

如 $n > r+1$，由(7.9.1)，

$$|D^r f_n(x) - D^r f_{n-1}(x)|$$

$$= \left| \frac{1}{\delta_n} [D^{r-1} f_{n-1}(x) - D^{r-1} f_{n-1}(x - \delta_n) - \delta_n D^r f_{n-1}(x)] \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_n} \frac{\delta_n^2}{2} \|D^{r+1} f_n\| \qquad \text{（用 Taylor 定理）}$$

$$\leqslant \frac{\delta_n}{2} m_{r+1}。 \qquad \text{（由(7.9.2)式）}$$

所以 $\|D^r f_n - D^r f_{n-1}\| \leqslant \frac{\delta_n}{2} m_{r+1}$。

$$D^r f_n = D^r f_r + \sum_{i=r+1}^{n} (D^r f_i - D^r f_{i-1}),$$

函数项级数 $\sum_{i=r+1}^{\infty} (D^r f_i - D^r f_{i-1})$ 一致收敛，因而对所有的 $r$，当 $n \to \infty$，$D^r f_n$ 有一致收敛的极限。按定理 7.3 中的论证，存在 $g \in C^\infty(R)$ 使在 $\boldsymbol{R}$ 上，$f_n \to g$。又由(7.9.2)

$$\|D^r g\| \leqslant m_r。$$

因 $f_1 = \begin{cases} 0 & \text{在}(-\infty, a], \\ 1 & \text{在}[a + \delta_0 + \delta_1, \infty), \end{cases}$

$f_2 = \begin{cases} 0 & \text{在}(-\infty, a], \\ 1 & \text{在}[a + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2, \infty), \end{cases}$

……

所以 $g = \begin{cases} 0 & \text{在}(-\infty, a], \\ 1 & \text{在}[b, \infty), \end{cases}$

且 $0 \leqslant g \leqslant 1$。

§7.10 **引理** 设 $0 < a < b$，则存在 $f \in C^\infty(R^d)$，使 $0 \leqslant f \leqslant$

1，且当 $\|x\|\leqslant a$ 时，$f(x)=1$；当 $\|x\|\geqslant b$ 时，$f(x)=0$。

[证] 取 $f(x)=1-g(x_1^2+\cdots+x_n^2)$。

§7.11 **定义** 如 $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，记

$$D_K(\Omega)=\{f\in C^\infty(\Omega);\operatorname{supp} f\subset K\},$$

其中 $\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in\Omega:f(x)\neq 0\}}$ 称为 $f$ 的**支集**或**支柱**。

记 $H_K=\{p|_{D_K(\Omega)};p\in H(P)\}$，　　（$P$ 如(7.1.1)式）

则 $(D_K(\Omega),H_K)$ 是局部凸空间，简记成 $D_K(\Omega)$，$D_K(\Omega)$ 的拓扑即是 $(C^\infty(\Omega),H(P))$ 在其上导出的子拓扑。

§7.12 **定理** ① $D_k(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的闭线性子空间。

② $D_K(\Omega)$ 是 Frechet 空间，且 $D_K(\Omega)$ 的所有有界闭子集是紧集。

③ 如 $K,L$ 是 $\Omega$ 紧子集，且 $K\subset L$，则 $D_K(\Omega)$ 在 $D_L(\Omega)$ 中闭。

④ 映射 $(f,g)\mapsto fg$ 是 $C^\infty(\Omega)\times D_K(\Omega)\to D_K(\Omega)$ 中的连续映射。

[证] ① 因 $D_K(\Omega)=\bigcap\limits_{x\in\Omega\setminus K}\{f\in C^\infty(\Omega):f(x)=0\}$。由§7.1，映射 $T_x:f\mapsto f(x)$ 是 $C^\infty(\Omega)\mapsto C$ 的连续映射，$\{f\in C^\infty(\Omega):f(x)=0\}=T_x^{-1}(0)$，故是闭集，所以 $D_K(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中闭。

② $D_K(\Omega)$ 中有界闭子集是 $C^\infty(\Omega)$ 中有界闭子集，因而是 $C^\infty(\Omega)$ 中紧集，所以也是其子空间 $D_K(\Omega)$ 中紧集。

③ 显然 $D_K(\Omega)\subset D_L(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)$，$D_K(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中闭，故在 $D_L(\Omega)$ 中闭。

④ 由定理 7.8，映射 $(f,g)\mapsto fg$ 是 $C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$ 的连续映射。$g\in D_K(\Omega)$ 时 $fg\in D_K(\Omega)$，而 $D_K(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的子拓扑空间。当在 $C^\infty(\Omega)$ 中 $f_n\to f$，在 $D_K(\Omega)$ 中，$g_n\to g$，则在 $C^\infty(\Omega)$ 中 $g_n\to g$。因而 $f_ng_n\to fg$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中，但由于 $f_ng_n,fg\in D_K(\Omega)$，故在 $D_K(\Omega)$ 中，$f_ng_n\to fg$。

## 第八节　D(Ω)

记 $D(\Omega)=\bigcup\{D_K(\Omega):K$ 紧$\subset\Omega\}$。

如果把 $D(\Omega)$ 看作局部凸空间 $C^\infty(\Omega)$ 的子拓扑空间，则 $D(\Omega)$ 也成了局部凸空间，其中的连续半范即是把局部凸空间 $C^\infty(\Omega)$上的连续半范限制在$D(\Omega)$上。

用另一方法也可使 $D(\Omega)$成为局部凸空间，对所有的$n\in\mathscr{N}$，$\varphi\in D(\Omega)$，记

$$p_n(\varphi)=\max_{|\alpha|<n}\|D^\alpha\varphi\|_\Omega=\max_{|\alpha|<n}\sup_{x\in\Omega}|D^\alpha\varphi(x)|,$$

则$\{np_n:n\in\mathscr{N}\}$是 $D(\Omega)$上的半范基，在 $D(\Omega)$上生成一个局部凸拓扑结构。

以上在 $D(\Omega)$ 上定义的两种局部凸拓扑结构在其子空间 $D_K(\Omega)$ 上导出的子拓扑，即是在定义 7.11 中定义的$(D_K(\Omega),H_K)$，也即是局部凸空间$(C^\infty(\Omega),H(P))$在子空间$D_K(\Omega)$上导出的子拓扑。然而以上这两种局部凸拓扑都不能令人满意，不满足实用的要求。

［例 1］　令 $\varphi\in D(R)$，$\operatorname{supp}\varphi=[0,1]$，且在$(0,1)$中，$\varphi>0$，如

$$\varphi_n(x)=\varphi(x-1)+\frac{1}{2}\varphi(x-2)+\cdots+\frac{1}{n}\varphi(x-n),$$

则序列$\{\varphi_n\}$按以上两种拓扑都是 $D(R)$ 中的 Cauchy 序列，但不在其中收敛，因此以上两种局部凸拓扑都不是完备的。

［例 2］　对以上的 $\varphi$，又设

$\varphi_n(x)=\dfrac{1}{n}[\varphi(x-1)+\varphi(x-2)+\cdots+\varphi(x-n^2)]$，则按以上两种拓扑，都有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=0$，但是 $\int\varphi_n\,dx$ 不趋于 0，即映射$\varphi\mapsto\int\varphi\,dx$ 不连续，即由此积分定义的 $D(\Omega)$ 上的线性泛函是不连续

的。

§8.1 **定义** 局部凸空间 $D(\Omega)$ 是子空间族 $\{(D_K(\Omega), H_K): K$ 紧$\subset\Omega\}$ 定义的归纳限局部凸空间。这里$(D_K(\Omega), H_K)$即是定义 7.11 中定义的局部凸空间。

§8.2 **定理**

① 设 $Y$ 是局部凸空间(或一般的拓扑线性空间)，且 $T: D(\Omega) \mapsto Y$ 是线性映射，则 $T$ 在 $D(\Omega)$ 上连续$\Longleftrightarrow$对 $\Omega$ 的所有紧子集 $K$，$T|_{D_K}$ 在 $D_K(\Omega)$ 上连续。

② 如 $K_1 \subset \operatorname{int} K_2 \subset K_2 \subset \cdots$，且 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$，则 §8.1 定义的局部凸空间 $D(\Omega)$ 即是子空间序列 $\{(D_{K_i}(\Omega), H_{K_i}): i \in \mathcal{N}\}$的严格归纳限。

③ 如 $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，则 $D(\Omega)$ 的拓扑(由 §8.1 定义的)在 $D_K(\Omega)$ 上导出 $D_K(\Omega)$ 的拓扑 $(D_K(\Omega), H_K)$。且 $D(\Omega)$ 是 $T_2$ 的。

④ $D(\Omega)$ 是完备的，即其中每一 Cauchy 网收敛；$D(\Omega)$不能距离化。

⑤ 设 $B \subset D(\Omega)$，则 $B$ 在 $D(\Omega)$ 中有界的充分必要条件是：存在 $\Omega$ 的某一紧子集 $K$，使 $B \subset D_K(\Omega)$，且 $B$ 在 $D_K(\Omega)$ 中有界。

⑥ $D(\Omega)$中每一有界闭子集都是紧集。

⑦ 如$\{\varphi_n\}$是 $D(\Omega)$中的 Cauchy 序列，则必存在 $\Omega$ 的某一紧子集 $K$，使对所有的 $n$，$\varphi_n \in D_K(\Omega)$。

⑧ 把 $D(\Omega)$映入 $C^\infty(\Omega)$的包含映射是连续的。

⑨ 如 $T: D(\Omega) \mapsto C^\infty(\Omega)$是连续线性映射，且对 $\Omega$ 的任一紧子集 $K$，相应地存在 $\Omega$ 的某紧子集 $K'$ 使 $TD_K(\Omega) \subset D_{K'}(\Omega)$，则 $T$ 是 $D(\Omega) \mapsto D(\Omega)$连续的。

**[证]** ① 由定理 5.3 ② 推出。

② 如$K$是$\Omega$的任一紧子集，则存在$i_0$使$K\subset K_{i_0}$，即$\{K_i:i\in\mathcal{N}\}$是$\{K:K$紧$\subset\Omega\}$的共尾子集，由定理5.3③，由子空间族$\{(D_K(\Omega),H_K):K$紧$\subset\Omega\}$定义的归纳限局部凸空间即是由子空间序列$\{(D_{K_i}(\Omega),H_{K_i}):i\in\mathcal{N}\}$定义的归纳限局部凸空间。且容易验证后者是严格归纳限。

③ 设$K\subset\Omega$，如②中选取$K_i$，取$K_1=K$，则由定理6.3、6.4推出结论。

④ 由定理7.12②、定理6.7，$D(\Omega)$是完备的。

$$D(\Omega)=\bigcup_{i=1}^{\infty}D_{K_i}(\Omega),\ D_{K_i}(\Omega)\text{是}D(\Omega)\text{的真闭线性子空间。}$$

因拓扑线性空间的真线性子空间无内点，故$D_{K_i}(\Omega)$是$D(\Omega)$中的疏集，$D(\Omega)$是可数多个疏集的并，是第一纲集；$D(\Omega)$又是完备的，如可距离化，由Baire的纲定理，它是第二纲集，得出矛盾。所以$D(\Omega)$不能距离化。

⑤ 由定理7.12③和定理6.5推出。

⑥ 由⑤和定理7.12②③推出。

⑦ 由⑤推出。

⑧ 由①推出。

⑨ 由①推出。

§8.3 系 ① 微分映射$D^\alpha:D(\Omega)\mapsto D(\Omega)$是连续的。

② 如$g\in C^\infty(\Omega)$，则乘子映射$f\mapsto gf$是$D(\Omega)\mapsto D(\Omega)$的连续映射。

③ 如$g\in D(\Omega)$，则乘子映射$f\mapsto gf$是$C^\infty(\Omega)\mapsto D(\Omega)$的连续映射。

［证］ ① 已知$D^\alpha:C^\infty(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$是连续的。由定理8.2⑧，包含映射$I:D(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$是连续的。所以$D^\alpha:D(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$连续，再用定理8.2⑨。

② 证法与①相似，用定理7.8。

③ 存在 $\Omega$ 的紧子集 $K$，使 $g\in D_K(\Omega)$，映射 $T: f\mapsto gf$ 由定理 7.8 是 $C^\infty(\Omega)\mapsto C^\infty(\Omega)$ 连续的，但 $TC^\infty(\Omega)\subset D_K(\Omega)$，$D_K(\Omega)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 的子拓扑空间，所以 $T: C^\infty(\Omega)\mapsto D_K(\Omega)$ 连续，而 $D_K(\Omega)$ 是 $D(\Omega)$ 的子拓扑空间，包含映射 $I: D_K(\Omega)\mapsto D(\Omega)$ 连续。所以 $T: C^\infty(\Omega)\to D(\Omega)$ 连续。

§8.4 **单位分解定理** 设 $\{\Omega_\beta:\beta\in B\}$ 是 $\Omega$ 的某些开子集 $\Omega_\beta$ 组成的开子集族，且 $\Omega=\bigcup_{\beta\in B}\Omega_\beta$，则存在 $D(\Omega)$ 中序列 $\{\psi_n: n\in\mathcal{N}\}$ 满足：

① $\forall n\in\mathcal{N}$，$0\leqslant\psi_n\leqslant 1$；

② $\forall n\in\mathcal{N}$，$\exists\beta_n\in B$，使 $\operatorname{supp}\psi_n\subset\Omega_{\beta_n}$；

③ 对 $\Omega$ 的任一紧子集 $K$，存在开集 $W$，使 $K\subset W\subset\Omega$，且存在自然数 $m=m(K)$，使

$$\forall x\in W,\ \psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_m(x)=1,$$

$$\forall x\in W,\ 当\ i\geqslant 1,\ \psi_{m+i}(x)=0,$$

因而 $\forall x\in\Omega,\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)=1$。

［证］ 设 $\{\bar{B}_n: n\in\mathcal{N}\}$ 是所有球心为有理点、半径为正有理数且至少包含在某一 $\Omega_\beta$ 内的闭球的集合，$V_n$ 是与 $\bar{B}_n$ 球心相同、半径为其一半的开球。以下证明 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$。

$\forall x\in\Omega,\exists\beta\in B$ 使 $x\in\Omega_\beta$，$\exists$ 正有理数 $\varepsilon$，使闭球 $\bar{B}(x,\varepsilon)\subset\Omega_\beta$，取有理点 $x'\in\boldsymbol{R}^d$ 使 $x'\in B(x,\varepsilon/3)$，则 $x\in B(x',\varepsilon/3)$ 且

$$\bar{B}(x',2\varepsilon/3)\subset\bar{B}(x,\varepsilon)\subset\Omega_\beta,$$

所以，$\exists$ 自然数 $n_0$，使 $\bar{B}(x',2\varepsilon/3)=\bar{B}_{n_0}$ 且 $B(x',\varepsilon/3)=V_{n_0}$，所以 $x\in V_{n_0}$，因此 $\Omega\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$。由 $V_n$ 的定义 $\Omega\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$。

所以 $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$。

由引理 7.10，$\exists\varphi_n\in D(\Omega)$ 使 $0\leqslant\varphi_n\leqslant 1$，在 $V_n$ 中 $\varphi_n=1$，在

$B_n$ 外 $\varphi_n=0$，且可使 supp $\varphi_n\subset$ 开球 $D_n$。

令 $\psi_n=(1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\cdots(1-\varphi_{n-1})\varphi_n$，$\forall n\in\mathcal{N}$，有
$\psi_n\in D(\Omega)$ 且 $0\leqslant\psi_n\leqslant1$，
且 supp $\psi_n\subset$ supp $\varphi_n\subset B_n\subset\bar{B}_n\subset\Omega_{\beta_n}$，
所以 ①、② 均成立。

如 $K$ 是 $\Omega$ 的任一紧子集，则存在自然数 $m=m(K)$，使得
$K\subset V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_m=W$，

$\forall x\in W$，$\exists i\in\{1,\cdots,m\}$ 使 $x\in V_i$，因而 $\varphi_i(x)=1$。

用数学归纳法可证，$\forall n\in\mathcal{N}$，

$1-\psi_1-\cdots-\psi_n=(1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\cdots(1-\varphi_n)$，

所以 $\psi_1(x)+\psi_2(x)+\cdots+\psi_m(x)=1$。

$\psi_{m+i}(x)=(1-\varphi_1)\cdots(1-\varphi_m)\cdots(1-\varphi_{m+i-1})\varphi_{m+i}=0$。

注：以上证明中的 $\bar{B}_n$，$V_n$ 还可以适当选取，使满足以下条件：对 $\Omega$ 的所有紧子集 $K$，存在自然数 $n_K$，使得当 $i>n_K$ 时，$\bar{B}_i\cap K=\phi$。

取 $\Omega$ 的紧子集序列 $\{K_n\}$ 满足。

$$\phi=K_0\subset K_1\subset\text{int }K_2\subset K_2\subset\text{int }K_3\subset\cdots,$$

且
$$\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n。$$

取闭球序列 $\{\bar{B}(x_n^{(1)},r_n^{(1)})\}$ 使满足：

$$\forall n,\bar{B}(x_n^{(1)},r_n^{(1)})\subset\Omega,\ \text{且}\bigcup_{n=1}^{\infty}B(x_n^{(1)},r_n^{(1)}/2)=\Omega\supset K_1,$$

因 $K_1$ 紧，$\exists$ 自然数 $m_1$，使

$$\bigcup_{n=1}^{m_1}B(x_n^{(1)},r_n^{(1)}/2)=G_1\supset K_1=K_1\setminus G_0,$$

其中 $G_0=\phi$。

设 $G_l$ 已取好，它是有限个开球之并，

$$G_l=G_{l-1}\cup\left(\bigcup_{n=1}^{m_l}B(x_n^{(l)},r_n^{(l)}/2)\right)\qquad(8.4.1)$$

$$\bar{B}(x_n^{(l)}, r_n^{(l)}) \subset \Omega \setminus K_{l-1} \tag{8.4.2}$$

$$\bigcup_{n=1}^{m_l} B(x_n^{(l)}, r_n^{(l)}/2) \supset K_l \setminus G_{l-1} \tag{8.4.3}$$

则 $G_l \supset G_{l-1} \cup (K_l \setminus G_{l-1}) \supset K_l$。

因 $\Omega \setminus K_l$ 是开集，故有闭球序列 $\{\bar{B}(x_n^{(l+1)}, r_n^{(l+1)})\}$ 满足：

$$\forall n \in \mathcal{N}, \bar{B}(x_n^{(l+1)}, r_n^{(l+1)}) \subset \Omega \setminus K_l, \tag{8.4.2$'$}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n^{(l+1)}, r_n^{(l+1)}/2) = \Omega \setminus K_l \supset K_{l+1} \setminus G_l,$$

因 $K_{l+1} \setminus G_l$ 是紧集，$\exists$ 自然数 $m_{l+1}$，使

$$\bigcup_{n=1}^{m_{l+1}} B(x_n^{(l+1)}, r_n^{(l+1)}/2) \supset K_{l+1} \setminus G_l \tag{8.4.3$'$}$$

$$令 G_{l+1} = G_l \cup \left[\sum_{n=1}^{m_{l+1}} B(x_n^{(l+1)}, r_n^{(l+1)}/2)\right] \tag{8.4.1$'$}$$

则它是有限个开球之并。$G_{l+1} \supset K_{l+1}$。

故对所有的 $l$，(8.4.1)、(8.4.2)、(8.4.3)成立。这样得出可数多个开球 $B(x_n^{(l)}, r_n^{(l)}/2)$，$n=1,2,\cdots,m_l$；$l=1,2,3,\cdots$，

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{m_l} B(x_n^{(l)}, r_n^{(l)}/2) \supset \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l = \Omega,$$

令 $\{V_i\} = \{B(x_n^{(l)}, r_n^{(l)}/2): n=1,\cdots,m_l; l=1,2,\cdots\}$，$\{\bar{B}_i\} = \{\bar{B}(x_n^{(l)}, r_n^{(l)})\}$，并按以下次序重新编号：

$B(x_1^{(1)}, r_1^{(1)}/2), \cdots, B(x_{m}^{(1)}, r_{m_1}^{(1)}/2), B(x_1^{(2)}, r_1^{(2)}/2), \cdots,$

$B(x_{m_2}^{(2)}, r_{m_2}^{(2)}/2) \cdots$

则 $\bar{B}_i \subset \Omega$，$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$。

对 $\Omega$ 的任一紧子集 $K$，存在某一 $l$，使 $K \subset \bigcup_{i=1} \text{int}\, K_i \subset K_l$，

取 $n_K = m_1 + m_2 + \cdots + m_l$，

则当 $i > n_K$，$\exists j \geqslant 1$ 使

$$\bar{B}_i = \bar{B}(x_n^{(l+j)}, r_n^{(l+j)}) \subset \Omega \setminus K_{l+j-1},$$

所以，$\bar{B}(x_n^{(l+j)}, r_n^{(l+j)}) \cap K_{l+j-1} = \phi$，

因此，$\bar{B}(x_n^{(l+j)}, r_n^{(l+j)}) \cap K = \phi$，

即 $\bar{B}_i \cap K = \phi$。

§ 8.5　系 ① 按 $C^\infty(\Omega)$ 的拓扑，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n = 1$。

② $D(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中稠。

③ $D(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中不闭。

**证**　① 由定理 8.4 ③。

② 由 ① 和定理 7.8，如 $f \in C^\infty(\Omega)$，则按 $C^\infty(\Omega)$ 的拓扑，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\psi_n = f$，而对所有的 $n$，$f\psi_n \in D(\Omega)$，$\sum\limits_{i=1}^{n} f\psi_i \in D(\Omega)$。

③ 由 ② 推出，因 $D(\Omega) \neq C^\infty(\Omega)$。

§ 8.6　**系**　设紧集 $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i \subset \Omega$，则对 $i = 1, 2, \cdots, n$，存在 $\psi_i \in D(\Omega)$，$0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$，$\operatorname{supp} \psi_i \subset \Omega_i$，且存在开集 $W$，使 $K \subset W \subset \Omega$，在 $W$ 上 $\sum\limits_{i=1}^{n} \psi_i = 1$。

［**证**］　存在紧集 $K_1$ 使 $K \subset \mathring{K}_1 \subset K_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Omega_i$，令 $\Omega \setminus K_1 = \Omega_{n+1}$，则 $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} \Omega_i$。由定理 8.4，存在 $D(\Omega)$ 中序列 $\{h_j\}$，$0 \leqslant h_j \leqslant 1$，$\sum\limits_{j=1}^{\infty} h_j = 1$，$\operatorname{supp} h_j \subset \Omega_{i(j)}$，$1 \leqslant i(j) \leqslant n+1$，且有开集 $W_1$ 和正整数 $m$，使 $K_1 \subset W_1 \subset \Omega$，在 $W_1$ 上，$\sum\limits_{j=1}^{m} h_j = 1$。对 $1 \leqslant i \leqslant n+1$，考虑自然数的有限子集。

$$A_i = \{j \in \mathcal{N} : 1 \leqslant j \leqslant m,\ \operatorname{supp} h_j \subset \Omega_i\},$$

令 $C_i = A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1})$，当 $2 \leqslant i \leqslant n+1$，令 $C_1 = A_1$。

如 $C_i = \phi$，令 $\psi_i = 0$，如 $C_i \neq \phi$，令 $\psi_i = \sum\limits_{j \in C_i} h_j$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1} \psi_i = \sum_{j=1}^{m} h_j。$$

且 $\operatorname{supp} \psi_i \subset \Omega_i$，$\psi_i \in D(\Omega)$，$0 \leqslant \psi_i \leqslant 1$。

当 $j\in C_{n+1}$，$\operatorname{supp} h_j\subset\Omega_{n+1}=\Omega\setminus K_1$，在 $K_1$ 上 $h_j=0$，因而在 $K_1$ 上，$\psi_{n+1}=\sum\limits_{j\in C_{n+1}} h_j=0$。

所以在 $K_1$ 上 $\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i=\sum\limits_{j=1}^{m} h_j=1$。

取 $W=\mathring{K}_1$，则 $W$ 开，$K\subset W\subset\Omega$，在 $W$ 上 $\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_i=1$。

§8.7 **定理** 设$(Y,Q)$是局部凸空间，且 $T:D(\Omega)\mapsto Y$ 是线性映射，则以下的 ① ② ③ 等价．

① $T$ 是连续的。

② $T$ 把 $D(\Omega)$的每一有界集映成 $Y$ 的有界集。

③ 如$\{\varphi_n\}$是 $D(\Omega)$中的序列，且 $\varphi_n\to 0$，则必有 $T\varphi_n\to 0$。

［证］ ①⇒② 设 $B$ 是 $(D(\Omega)$、$H)$ 中任一有界集，对任一 $q\in Q$，$qT$ 是 $D(\Omega)$上连续半范，所以 $qT\in H$，因此

$$\sup q(T(B))=\sup(qT)(B)=\sup_{x\in B}(qT)(x)<\infty。$$

故 $T(B)$在 $Y$ 中有界。

②⇒③ 用反证法。假设 ③ 不成立，则在 $D(\Omega)$中存在某序列$\{\varphi_n\}$，使得在 $D(\Omega)$中，$\varphi_n\to 0$，但在 $Y$ 中，$T\varphi_n$ 不趋于 0。故存在某一 $q\in Q$，$q(T(\varphi_n))$ 不趋于 0。因而存在某一 $\varepsilon>0$ 和子序列$\{\varphi_{n_i}\}$，使得 $q(T\varphi_{n_i})\geqslant\varepsilon$，对所有的 $i$ 成立。

由定理 8.2 ⑦ 和 ③，存在 $\Omega$ 的某紧子集 $K$，使 $\{\varphi_{n_i}\}\subset D_K(\Omega)$，且在 $D_K(\Omega)$中，$\varphi_{n_i}\to 0$，由定理 7.12 ②，$D_K(\Omega)$ 中有可数的半范基$\{p'_n: n\in\mathcal{N}\}$生成 $D_K(\Omega)$ 的局部凸拓朴，令

$$p_n=p'_1\vee p'_2\vee\cdots\vee p'_n,$$

则$\{p_n:n\in\mathcal{N}\}$也是 $D_K(\Omega)$半范基，生成同样的局部凸拓扑，且

$$p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots。$$

对任一 $k\in\mathcal{N}$，取 $n_{i_k}$，使 $p_k(\varphi_{n_{i(k)}})<1/k$，

如 $k\geqslant j$，则 $p_j(k\varphi_{n_{i(k)}})\leqslant p_k(k\varphi_{n_{i(k)}})<1$，

故 $\{k\varphi_{n_{i(k)}}:k\in\mathcal{N}\}$在 $D_K(\Omega)$中有界，因而在 $D(\Omega)$中有界。

另一方面，$\forall k \in \mathcal{N}$，

$$q(Tk\varphi_{n_i(k)}) = kq(T\varphi_{n_i(k)}) \geqslant k\varepsilon,$$

所以 $T\{k\varphi_{n_i(k)} : k \in \mathcal{N}\}$ 在 $Y$ 中无界。因此 ② 不成立。这证明了 ②⇒③。

③⇒① 如果 ① 不成立，即 $T$ 不连续，则由定理 8.2 ①，存在 $\Omega$ 的某紧子集 $K$，使 $T$ 在 $D_K(\Omega)$ 上的限制 $T|_{D_K}: D_K(\Omega) \mapsto Y$ 不连续。

取 $D_K(\Omega)$的半范基$\{p_n : n \in \mathcal{N}\}$如前。则存在某一 $q \in Q$，使得对所有的 $n \in \mathcal{N}$，$qT \not\leqslant np_n$，故 $\exists \psi_n \in D_K(\Omega)$，使得

$$qT(\psi_n) > np_n(\psi_n),$$

取 $\varphi_n = \psi_n / qT(\psi_n)$

则 $np_n(\varphi_n) < 1$，但 $qT(\varphi_n) = 1$。

如 $n \geqslant j$，则 $p_j(\varphi_n) \leqslant p_n(\varphi_n) < 1/n$，

因而在 $D_K(\Omega)$ 中 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$。

由定理 8.2 ③，$D_K(\Omega)$是 $D(\Omega)$ 的子拓扑空间，故在 $D(\Omega)$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$，但在 $Y$ 中 $T\varphi_n$ 不趋于 0 当 $n \to \infty$，因而 ③ 不成立。这证明了 ③⇒①。

# 第二章　广义函数

## 第九节　广义函数的定义

§ 9.1　**引理**　设 $\Lambda$ 是 $D(\Omega)$ 上的线性泛函，则以下的①—④是等价的。

① $\Lambda$ 是连续的。

② $\Lambda$ 把 $D(\Omega)$ 的有界集映成有界集。

③ 如 $D(\Omega)$ 中序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 0，则 $\Lambda\varphi_n \to 0$。

④ 对 $\Omega$ 中任一紧集 $K$，存在正数 $M = M(K)$，非负整数 $N = N(K)$，使对所有的 $\varphi \in D_K(\Omega)$，

$$|\Lambda(\varphi)| \leqslant M p_{N,K}(\varphi) = M \max_{|\alpha|<N} \|D^\alpha \varphi\|_K$$

$$= M \max_{|\alpha|<N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|。$$

［证］　①②③ 的等价性由定理 8.7。

①$\Longleftrightarrow$④ 由定理 8.2①。

§ 9.2　**定义**　$D(\Omega)$ 上的连续线性泛函称为 $\Omega$ 上的**广义函数**，其全体组成的线性空间记为 $D'(\Omega)$。

§ 9.3　**例**

**例①**　设 $f$ 是 $\Omega$ 上局部可积函数，即在 $\Omega$ 的任意紧子集上 Lebesque 可积，则 $\forall \varphi \in D_K(\Omega)$，

$$\int_\Omega \varphi f\, dx = \int_K \varphi f\, dx \text{ 存在，且}$$

$$\left|\int_\Omega \varphi f\, dx\right| \leqslant \int_K |f||\varphi|\, dx \leqslant \int_K |f|\, dx \cdot \|\varphi\|_K$$

$$= M(K)\|\varphi\|_K = M(K) p_{0,K}(\varphi)。$$

故映射 $\varphi\mapsto\int_\Omega \varphi f\,dx$ 是 $D(\Omega)$ 上的连续线性泛函，即是 $\Omega$ 上的广义函数，记成 $\Lambda_f$。

以下要证明：如作为 $D'(\Omega)$ 的元素 $\Lambda_f=0$，则 $f=0$ a.e.（几乎处处）。即如果

$$\forall\varphi\in D(\Omega),\ \int_\Omega \varphi f\,dx=0,$$

则
$$f=0\quad \text{a.e.}$$

先证明以下的**引理**(i)、如 $g\in C(\Omega)$，有紧支集 $K\subset\Omega$，则存在序列 $\{\varphi_n\}\subset D_{K_1}(\Omega)$，其中 $K\subset K_1\subset\Omega$，$K_1$ 紧，在 $\Omega$ 上 $\varphi_n\to g$ 一致收敛。

取
$$J(x)=\begin{cases}k\exp[-1/(1-\|x\|^2)] & \text{当 } \|x\|<1,\\ 0 & \text{当 } \|x\|\geqslant 1,\end{cases}$$

其中 $k>0$，选 $k$ 使得 $\int_{R^d} J(x)dx=1$。

对 $\varepsilon>0$，令 $J_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-d}J(x/\varepsilon)$，则 $J_\varepsilon\in D(R^d)$，$J_\varepsilon(x)\geqslant 0$，且满足

当 $\|x\|\geqslant\varepsilon$ 时，$J_\varepsilon(x)=0$，

$$\int_{R^d} J_\varepsilon(x)dx=1。$$

把 $g$ 延拓到 $\boldsymbol{R}^d$，使在 $\Omega$ 外 $g=0$。作卷积

$$(J_\varepsilon * g)(x)=\int_{R^d} J_\varepsilon(x-y)g(y)dy$$
$$=\int_{\|x-y\|<\varepsilon} J_\varepsilon(x-y)g(y)dy,$$

则
$$D^\alpha(J_\varepsilon * g)(x)=\int_{R^d} D_x^\alpha J_\varepsilon(x-y)g(y)dy,$$

所以
$$J_\varepsilon * g\in C^\infty(\boldsymbol{R}^d)。$$

$\Omega\neq\boldsymbol{R}^d$ 时，$d(K,\boldsymbol{R}^d\setminus\Omega)=\inf\{\|x-y\|:x\in K,\ y\in\boldsymbol{R}^d\setminus\Omega\}=\delta>0$。

$\varepsilon<\delta/2$ 时就有 $J_\varepsilon * g \in D(\boldsymbol{R}^d)$，且

$$\operatorname{supp}(J_\varepsilon * g) \subset \operatorname{supp} g + \bar{B}(0,\varepsilon) \subset K + \bar{B}(0,\delta/2) = K_1 \subset \Omega,$$

$$|(J_\varepsilon * g)(x) - g(x)| = \left| \int_{R^d} J_\varepsilon(x-y)[g(y)-g(x)]dy \right|$$

$$= \left| \int_{\|y-x\|<\varepsilon} J_\varepsilon(x-y)[g(y)-g(x)]dy \right|$$

$$\leqslant \sup_{\|y-x\|<\varepsilon} |g(y)-g(x)|。$$

由于 $g$ 在 $\Omega$ 上一致连续，故

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon * g = g \quad 在\ \Omega\ 上一致 \tag{9.3.1}$$

现令 $\varphi_n = J_{1/n} * g$，则在 $\Omega$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = g$ 一致成立，且当 $n$ 充分大时 $(1/n<\delta/2)$，$\varphi_n \in D_{K_1}(\Omega)$。

当 $\Lambda_f = 0$ 时，$\int_\Omega \varphi_n f\, dx = 0$，令 $n\to\infty$，得$\int_\Omega gf\, dx = 0$，此式对任一有紧支集的 $g\in C(\Omega)$ 都成立。

**引理**(ii) Лузин(Lusin) 定理 设 $g$ 是 $\Omega$ 上复值可测函数，$\mu$ 表示 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 Lebesque 测度，$\mu(\{x\in\Omega: g(x)\neq 0\})<\infty$，$\forall\varepsilon>0$，则存在有紧支集的 $\psi\in C(\Omega)$，使得

$$\mu(\{x\in\Omega: \psi(x)\neq g(x)\})<\varepsilon,$$

且

$$\sup_{x\in\Omega} |\psi(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |g(x)|。$$

证明参看实变函数论的教材，如那汤松：实变函数论上册，Rudin: Real and Complex Analysis。

由 Lusin 定理即可推出

**引理**(iii) 如 $g$ 是 $\Omega$ 上有界可测函数，$|g|\leqslant M$，$\operatorname{supp} g =$ 紧集 $K\subset\Omega$，则有 $C(\Omega)$ 中函数序列 $\{g_n\}$，$\operatorname{supp} g_n \subset K_1$，$K_1$ 是 $\Omega$ 中某一包含 $K$ 的紧集，$|g_n|\leqslant M$，且 $g_n\to g$ a.e.。

如 $g$ 是 $\Omega$ 内有紧支集的有界可测函数，取以上的 $\{g_n\}$，由引理 (i)，

$\int_{\Omega} g_n f\, dx = 0$，即$\int_{K_1} g_n f\, dx = 0$，用 Lebesque 控制收敛定理

$$\int_{\Omega} gf\, dx = \int_{K} gf\, dx = \int_{K_1} gf\, dx = 0。$$

上式对所有在 $\Omega$ 中有紧支集的有界可测函数 $g$ 都成立。

现设 $\operatorname{sgn} f(x) = e^{-i\arg f(x)}$，当 $f(x)=0$ 时，令 $\operatorname{sgn} f(x)=0$，则 $\operatorname{sgn} f$ 是有界可测函数，对 $\Omega$ 的紧子集 $K$，令

$$g_K(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) & 当\ x \in K, \\ 0 & 当\ x \overline{\in} K, \end{cases}$$

则 $g_K$ 有紧支集，所以

$$\int_{\Omega} g_K f\, dx = \int_{K} [\operatorname{sgn} f(x)]\, f(x) dx$$
$$= \int_{K} |f(x)|\, dx = 0,$$

所以 $f(x)=0$ 在 $K$ 上 a.e.。

因 $K$ 是 $\Omega$ 的任意紧子集，可取 $\Omega$ 的紧子集序列 $\{K_n\}$ 使 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$，所以

$f(x)=0$　在 $\Omega$ 上 a.e.，已证得

$\Lambda_f = 0 \Rightarrow f=0$　在 $\Omega$ 上 a.e.。

如把 $\Omega$ 中局部可积函数的全体记作 $L^1_{loc}(\Omega)$，且其中几乎处处相等的函数看作是同一个元素，则把 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 映成 $\Lambda_f \in D'(\Omega)$ 的映射是 $L^1_{loc}(\Omega) \mapsto D'(\Omega)$ 中的一一线性映射。线性空间 $L^1_{loc}(\Omega)$ 线性同构于 $D'(\Omega)$ 的一个线性子空间，即 $L^1_{loc}(\Omega)$ 代数地嵌入 $D'(\Omega)$ 中。

**例②**　设 $\mu$ 是 $\Omega$ 上局部有限 Borel 测度，即在 $\Omega$ 的任一紧子集上测度为有限的，则 $\forall \varphi \in D_K(\Omega)$，

$\int_{\Omega} \varphi\, d\mu = \int_{K} \varphi\, d\mu$　存在。

如 $\mu$ 是正测度，则

$$\left|\int_\Omega \varphi\, d\mu\right| \leqslant \mu(K)\|\varphi\|_K = \mu(K)p_{0,K}(\varphi)。$$

如果$\mu$是复测度，记$|\mu|$是$\mu$的全变分，即对$\Omega$的任一可测子集$E$，

$$|\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)|: E = \bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,\ E_i\text{可测，当}i\neq j,\ E_i\cap E_j = \phi\right\},$$

则
$$\left|\int_\Omega \varphi\, d\mu\right| \leqslant |\mu|(K)p_{0,K}(\varphi)。$$

故线性泛函$\varphi\mapsto\int_\Omega \varphi\, d\mu$是广义函数，记作$\Lambda_\mu$。

设$\xi\in\Omega$，$\mu_\xi$是$\delta$测度，即对可测集$E$，

$$\mu_\xi(E) = \begin{cases} 0 & \text{当}\xi\bar{\in}E, \\ 1 & \text{当}\xi\in E, \end{cases}$$

则
$$\Lambda_{\mu_\xi}(\varphi) = \varphi(\xi),\quad \varphi\in D(\Omega),$$

此即$\delta$函数，记作$\delta_\xi$，即$\delta_\xi(\varphi) = \varphi(\xi)$。

§9.4 **定义** 设$\Lambda\in D'(\Omega)$，定义

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi),\quad \varphi\in D(\Omega),$$

由§8.3系①，$D^\alpha\Lambda\in D'(\Omega)$。

§9.5 **引理** $D^\alpha(D^\beta\Lambda) = D^{\alpha+\beta}\Lambda$。

［**证**］ $\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$\begin{aligned}(D^\alpha(D^\beta\Lambda))(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|}(D^\beta\Lambda)(D^\alpha\varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\Lambda(D^\beta D^\alpha\varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\Lambda(D^{\alpha+\beta}\varphi) \\ &= (D^{\alpha+\beta}\Lambda)(\varphi)。\end{aligned}$$

所以
$$D^\alpha(D^\beta\Lambda) = D^{\alpha+\beta}\Lambda$$

§9.6 **定理** 设$f$是$[0,1]$上连续不减函数，$\Omega = (0,1)$。在$(0,1)$上定义一测度$\mu$，使对$[a,b]\subset(0,1)$，

$$\mu([a,b]) = f(b) - f(a),$$

则 $$DA_f = A_\mu。$$

[证] 设 $\varphi\in D(\Omega)$，则 $\forall x\in(0,1)$，

$$\varphi(x)=\int_0^x \varphi'(y)dy,$$

$$\begin{aligned}A_\mu(\varphi)&=\int_0^1 \varphi(x)\,d\mu(x)=\int_0^1 d\mu(x)\int_0^x \varphi'(y)dy\\&=\int_0^1 dy\int_y^1 \varphi'(y)\,d\mu(x)\\&=\int_0^1 \varphi'(y)[f(1)-f(y)]\,dy\\&=-\int_0^1 \varphi'(y)\,f(y)\,dy\\&=(DA_f)(\varphi)。\end{aligned}$$

所以 $DA_f=A_\mu$。证毕。

一般的 $$DA_f \neq A_{Df}。$$

设 $f$ 是连续不减函数，则 $DA_f=A_{Df}$ 当且仅当：

$$\forall\varphi\in D(\Omega),\ \int_0^1 \varphi(x)\,d\mu(x)=\int_0^1 \varphi(x)(Df)(x)dx \qquad (9.6.1)$$

其中 $\mu$ 是上述的由 $f$ 定义的测度：$\mu([a,b])=f(b)-f(a)$。

对 $(0,1)$ 中任一闭子区间 $[a,b]$，取特征函数

$$\psi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x\in[a,b],\\ 0 & \text{当 } x\bar{\in}[a,b],\end{cases}$$

则 $$\int_0^1 \psi_{[a,b]}(x)\,d\mu(x)=\int_a^b d\mu(x)=f(b)-f(a),$$

由 §9.3 例 ① 中的引理 (i)、(iii)，取 $\varphi_n\in D(\Omega)$，$\Omega=(0,1)$，$\forall n$，$|\varphi_n(x)|\leqslant 1$，$\operatorname{supp}\varphi_n\subset[c,d]\subset(0,1)$，$\varphi_n\to\psi_{[a,b]}$，a.e.，

则 $$\int_0^1 \varphi_n(x)d\mu(x)\to\int_0^1 \psi_{[a,b]}(x)d\mu(x)=f(b)-f(a)。$$

如 (9.6.1) 式成立，则

$$\int_0^1 \varphi_n(x)d\mu(x)=\int_0^1 \varphi_n(x)(Df)(x)dx,$$

令 $n\to\infty$，因 $Df\in L[0,1]$，用控制收敛定理得

$$f(b)-f(a)=\int_0^1 \psi_{[a,b]}(x)(Df)(x)\,dx=\int_a^b (Df)(x)dx,$$

由于 $b$ 的任意性，$f$ 是不定积分，因此 $f$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续。

反之，如 $f$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续，$\forall\varphi\in D(\Omega)$，分部积分公式成立，

$$-\int_0^1 f\varphi'\,dx=\int_0^1 \varphi(Df)dx,$$

即
$$D\Lambda_f=\Lambda_{Df}。$$

所以，如 $f$ 是连续不减函数(或连续的有界变差函数)，则 $D\Lambda_f=\Lambda_{Df}\Longleftrightarrow f$ 绝对连续。

但是存在连续不减函数 $\Theta(x)$，$\Theta'(x)=0$，a.e.，$\Theta(1)-\Theta(0)=1>0=\int_0^1\Theta'(x)dx$，$\Theta$ 不绝对连续(参看那汤松著：实变函数论第八章 §2 末尾)。

如取 $f=\Theta$，则 $D\Lambda_f\neq\Lambda_{Df}$。

§9.7 **定理** 设 $f\in C^m(\Omega)$，则当 $|\alpha|\leqslant m$ 时，$D^\alpha\Lambda_f=\Lambda_{D^\alpha f}$。

[**证**] $\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$(D^\alpha\Lambda_f)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha\varphi\,dx$$

$$=\int_\Omega (D^\alpha f)\varphi\,dx=\Lambda_{D^\alpha f}(\varphi),$$

$\therefore\quad D^\alpha\Lambda_f=\Lambda_{D^\alpha f}$。

§9.8 **定义** 设 $f\in C^\infty(\Omega)$，$\Lambda\in D'(\Omega)$，由系 8.3②，$\varphi\mapsto f\varphi$ 是 $D(\Omega)\mapsto D(\Omega)$ 的连续线性映射。故映射 $\varphi\mapsto\Lambda(f\varphi)$ 在 $D(\Omega)$ 上连续。因而可定义无穷可微函数 $f$ 与广义函数 $\Lambda$ 的乘积 $f\Lambda\in D'(\Omega)$，由表达式

$$(f\Lambda)(\varphi)=\Lambda(f\varphi),\quad \varphi\in D(\Omega)。$$

§9.9 **定理** 设 $f\in C^\infty(\Omega)$，$\Lambda\in D'(\Omega)$，$i\in\{1,\cdots,d\}$，则

$$D_i(f\Lambda)=(D_if)\Lambda+fD_i\Lambda,$$

其中 $$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}。$$

[证] $\forall\varphi\in D(\Omega)$,

$$(D_i(f\Lambda))(\varphi)=-(f\Lambda)(D_i\varphi)=-\Lambda(fD_i\varphi),$$
$$((D_if)\Lambda)(\varphi)=\Lambda(D_if\cdot\varphi),$$
$$(f(D_i\Lambda))(\varphi)=(D_i\Lambda)(f\varphi)=-\Lambda(D_i(f\varphi))$$
$$=-\Lambda(D_if\cdot\varphi)-\Lambda(fD_i\varphi),$$

所以 $$D_i(f\Lambda)=(D_if)\Lambda+fD_i\Lambda。$$

## 第十节　广义函数的局部化与支集

§10.1　**定义**　设 $\Lambda_1,\Lambda_2\in D'(\Omega)$，$\Omega_1$ 是 $\Omega$ 的开子集，如果当 $\varphi\in D(\Omega)$，且 $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega_1$ 时，有 $\Lambda_1(\varphi)=\Lambda_2(\varphi)$，则称在 $\Omega_1$ 上 $\Lambda_1=\Lambda_2$。

§10.2　**例**①　如 $\mu$ 是 $\Omega$ 上局部有限的 Borel 测度，则在 $\Omega_1$ 上 $\Lambda_\mu=0$ 等价于对 $\Omega_1$ 的所有可测子集 $E$，$\mu(E)=0$，也等价于 $|\mu|(\Omega_1)=0$，其中 $|\mu|$ 是 $\mu$ 的全变分。

**例**②　如 $f$ 是 $\Omega$ 上局部可积函数，则在 $\Omega_1$ 上 $\Lambda_f=0$ 等价于在 $\Omega_1$ 上，$f=0$ a.e.。

§10.3　**注**　设 $\Omega_1$ 是 $\Omega$ 开子集，$\forall\varphi\in D(\Omega_1)$，可把 $\varphi$ 延拓到 $\Omega$，在 $\Omega\setminus\Omega_1$ 上令 $\varphi=0$，这样延拓后的 $\varphi\in D(\Omega)$，因而 $D(\Omega_1)\subset D(\Omega)$。$D(\Omega_1)$ 上可定义两种局部凸拓扑，一种是把 $D(\Omega_1)$ 作为局部凸空间 $(D(\Omega),H)$ 的拓扑子空间，记作 $(D(\Omega_1),H|_{D(\Omega_1)})$；另一种是作为子空间族 $\{D_K(\Omega_1):K$ 紧$\subset\Omega_1\}$ 的归纳限局部凸空间，记作 $(D(\Omega_1),H_1)$。一般来说，这两种拓扑是不相同的，因为对 $\Omega$ 的紧子集 $K$，$K\cap\Omega_1$ 不一定是 $\Omega_1$ 的紧子集。

设 $I:(D(\Omega_1),H_1)\mapsto(D(\Omega_1),H|_{D(\Omega_1)})$ 是恒等映射。对

$\Omega_1$ 的任一紧子集 $K$，$I$ 在 $D_K(\Omega_1)$ 上的限制为 $I|_{D_K(\Omega_1)}$: $D_K(\Omega_1) \mapsto (D(\Omega_1), H|_{D(\Omega_1)})$。包含映射 $h_{K,1}: D_K(\Omega_1) \mapsto D_K(\Omega)$ 连续，包含映射 $h_K: D_K(\Omega) \mapsto (D(\Omega), H)$ 连续。故包含映射 $h_K \circ h_{K,1}: D_K(\Omega_1) \mapsto (D(\Omega), H)$ 连续，所以 $I|_{D_K(\Omega_1)}$: $D_K(\Omega_1) \mapsto (D(\Omega_1), H|_{D(\Omega_1)})$ 连续。因而由归纳限拓扑的性质，$I: (D(\Omega_1), H_1) \mapsto (D(\Omega_1), H|_{D(\Omega_1)})$ 连续，即归纳限拓扑 $(D(\Omega_1), H_1)$ 强于 $(D(\Omega), H)$ 在 $D(\Omega_1)$ 上导出的子拓扑 $(D(\Omega_1), H|_{D(\Omega_1)})$。以后 $D(\Omega_1)$ 都是指归纳限拓扑 $(D(\Omega_1), H_1)$。而且已证明包含映射 $h_1: (D(\Omega_1), H_1) \mapsto (D(\Omega), H)$ 是连续的。

$$\forall \Lambda \in D'(\Omega), \Lambda|_{D(\Omega_1)} = \Lambda \circ h_1 \in D'(\Omega_1),$$

因此认为 $D'(\Omega) \subset D'(\Omega_1)$，但这里的包含映射不是一一的，即可能有 $\Lambda_1, \Lambda_2 \in D'(\Omega)$，$\Lambda_1 \neq \Lambda_2$，但 $\Lambda_1|_{D(\Omega_1)} = \Lambda_2|_{D(\Omega_1)}$。

由定义 10.1，$\Lambda_1, \Lambda_2 \in D'(\Omega)$，在 $\Omega$ 的开子集 $\Omega_1$ 上 $\Lambda_1 = \Lambda_2$，即限制在 $D(\Omega_1)$ 上，$\Lambda_1|_{D(\Omega_1)} = \Lambda_2|_{D(\Omega_1)}$。

§ 10.4 **定理** 设 $\Omega = \bigcup_{\beta \in B} \Omega_\beta$，对每一个 $\beta \in B$，$\Omega_\beta$ 是 $\Omega$ 的开子集，存在 $\Lambda_\beta \in D'(\Omega_\beta)$，且当 $\alpha, \beta \in B$，$\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \phi$ 时，

$$\Lambda_\alpha|_{D(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)} = \Lambda_\beta|_{D(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)},$$

（这种情况也称为在 $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ 上，$\Lambda_\alpha = \Lambda_\beta$），则存在唯一的 $\Lambda \in D'(\Omega)$ 满足：对所有的 $\beta \in B$，在 $\Omega_\beta$ 上 $\Lambda = \Lambda_\beta$，即 $\Lambda|_{D(\Omega_\beta)} = \Lambda_\beta$。

［证］ 按 § 8.4 的单位分解定理，取 $\psi_i, \beta_i, \psi_i \geqslant 0$，$\operatorname{supp} \psi_i \subset \Omega_{\beta_i}$，$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1$。

先证明存在性。定义 $\Lambda(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{\beta_i}(\psi_i \varphi)$，对任意固定的 $\varphi \in D(\Omega)$，因 $\operatorname{supp} \varphi$ 是 $\Omega$ 的紧子集，存在正整数 $m = m(\varphi)$，使

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{i=1}^{m(\varphi)} \Lambda_{\beta_i}(\psi_i \varphi),$$

因当 $i > m(\varphi)$ 时 $\psi_i$ 在 $\operatorname{supp} \varphi$ 上为 0，所以 $\psi_i \varphi = 0$，在 $\Omega$ 上。因

此 $\varphi=\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi$。

如 $\varphi\in D(\Omega_\beta)$，则 $\psi_i\varphi\in D(\Omega_\beta\cap\Omega_{\beta i})$，

$$\Lambda(\varphi)=\sum_{i=1}^{m}\Lambda_{\beta_i}(\psi_i\varphi)=\sum_{i=1}^{m}\Lambda_\beta(\psi_i\varphi)$$

$$=\Lambda_\beta\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i\varphi\right)=\Lambda_\beta(\varphi)。$$

所以在 $\Omega_\beta$ 上，$\Lambda=\Lambda_\beta$。

以下证明所定义的 $\Lambda$ 是连续的。设在 $D(\Omega)$ 中，序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 0，由定理 8.2⑦，存在 $\Omega$ 的某一紧子集 $K$，$\forall n$，$\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$，且在 $D_K(\Omega)$ 中，$\varphi_n\to 0$。又存在 $m=m(K)$，使

$\varphi_n=\sum_{i=1}^{m(k)}\psi_i\varphi_n$ 对所有的 $n$ 成立。

$$\Lambda(\varphi_n)=\sum_{i=1}^{m(k)}\Lambda_{\beta_i}(\psi_i\varphi_n)。$$

因在 $D_K(\Omega)$ 中，$\lim_{n\to\infty}\psi_i\varphi_n=0$，令 $K_i=K\cap\operatorname{supp}\psi_i$，则 $K_i\subset\Omega_{\beta_i}$，$\psi_i\varphi_n\in D_{K_i}(\Omega_{\beta_i})$ 且在 $D_{K_i}(\Omega_{\beta_i})$ 中，$\lim_{n\to\infty}\psi_i\varphi_n=0$，故在 $D(\Omega_{\beta_i})$ 中，$\lim_{n\to\infty}\psi_i\varphi_n=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}\Lambda(\varphi_n)=0$。因此 $\Lambda$ 是连续的。

以下证明唯一性。设有另一个 $\widetilde{\Lambda}\in D'(\Omega)$，满足：在 $\Omega_\beta$ 上 $\widetilde{\Lambda}=\Lambda_\beta$，则

$$\widetilde{\Lambda}(\varphi)=\widetilde{\Lambda}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\varphi\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{\Lambda}(\psi_i\varphi)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_{\beta_i}(\psi_i\varphi)=\Lambda(\varphi)。$$

所以

$$\widetilde{\Lambda}=\Lambda。$$

§10.5 **定理** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，则存在 $\Omega$ 的最大开子集 $\Omega_0$ 使在 $\Omega_0$ 上 $\Lambda=0$。（$\Omega_0$ 称为 $\Lambda$ 的**零化集**）

［证］ 设 $\{\Omega_\beta:\beta\in B\}$ 是所有在其上 $\Lambda=0$ 的 $\Omega$ 的开子集 $\Omega_\beta$ 组成的集类。只需证明在 $\bigcup_{\beta\in B}\Omega_\beta=\Omega_0$ 上，$\Lambda=0$。设 $\varphi\in D(\Omega)$，$\operatorname{supp}\varphi=K\subset\Omega_0$，由单位分解定理8.4，$\exists m=m(K)$，存在 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m\in D(\Omega_0)$，$\beta_1,\cdots,\beta_m\in B$，使 $\operatorname{supp}\psi_i\subset\Omega_{\beta_i}$，在包含 $K$ 的某开集 $W$ 上，$\sum_{i=1}^m\psi_i=1$。故 $\varphi=\sum_{i=1}^m\psi_i\varphi$。因 $\operatorname{supp}\psi_i\varphi\subset\Omega_{\beta_i}$，$\Lambda(\psi_i\varphi)=0$，所以

$$\Lambda(\varphi)=\sum_{i=1}^m\Lambda(\psi_i\varphi)=0。$$

在 $\Omega_0$ 上 $\Lambda=0$。

§10.6 **定义** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，$\Omega_0$ 是 $\Lambda$ 的零化集，则 $\Omega\setminus\Omega_0$ 称为 $\Lambda$ 的**支集**，记作 $\operatorname{supp}\Lambda$ 或 $S_\Lambda$。支集在 $\Omega$ 中(相对)闭。

§10.7 **引理** ① 如果 $\varphi\in D(\Omega)$，$\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\Lambda=\phi$，则 $\Lambda(\varphi)=0$。

② 如 $\operatorname{supp}\Lambda=\phi$，则 $\Lambda=0$。

③ 如 $\psi\in C^\infty(\Omega)$，在 $\operatorname{supp}\Lambda$ 的某开邻域（包含 $\operatorname{supp}\Lambda$ 的开集）上，$\psi=1$，则 $\psi\Lambda=\Lambda$。

［证］ ① 如 $\operatorname{supp}\varphi\cap\operatorname{supp}\Lambda=\phi$，则 $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\setminus\operatorname{supp}\Lambda=\Omega_0$，所以 $\Lambda(\varphi)=0$。

② 由①推出。

③ 设在 $\operatorname{supp}\Lambda$ 的开邻域 $G$ 上，$\psi=1$。则 $\forall\varphi\in D(\Omega)$，在 $G$ 上，$\varphi-\psi\varphi=0$，

$$\operatorname{supp}(\varphi-\psi\varphi)\subset\Omega\setminus G\subset\Omega\setminus\operatorname{supp}\Lambda=\Omega_0,$$

所以 $\Lambda(\varphi-\psi\varphi)=0$，即 $\Lambda(\varphi)=(\psi\Lambda)(\varphi)$。

§10.8 **定理** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，$\operatorname{supp}\Lambda$ 紧，则：

① 存在正数 $M$，非负整数 $N$ 和紧集 $L\supset\operatorname{supp}\Lambda$，$L\subset\Omega$，使对所有的 $\varphi\in D(\Omega)$，有

$$|\Lambda(\varphi)|\leqslant Mp_{N,L}(\varphi)。$$

② 存在唯一 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函 $\widetilde{\Lambda}$，使 $\widetilde{\Lambda}$ 在 $D(\Omega)$ 上的限制 $\widetilde{\Lambda}|_{D(\Omega)}=\Lambda$。

［证］ 由单位分解定理 8.4③，对紧集 $\operatorname{supp}\Lambda$，存在开集 $W$，满足 $\operatorname{supp}\Lambda\subset W\subset\Omega$，存在 $m$ 和 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m\in D(\Omega)$，使在 $W$ 上，

$$\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_m=1,$$

令
$$\psi=\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_m,$$

则 $\psi\in D(\Omega)$，且在 $W$ 上 $\psi=1$。

令 $L=\operatorname{supp}\psi$，则 $L\supset W\supset\operatorname{supp}\Lambda$，

因 $\Lambda|_{D_L(\Omega)}$ 是连续的，故存在 $M'$、$N$ 使

$$\forall f\in D_L(\Omega),\ |\Lambda(f)|\leqslant M'p_{N,L}(f).$$

由引理 10.7⑧，$\psi\Lambda=\Lambda$，所以，$\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$|\Lambda(\varphi)|=|\Lambda(\psi\varphi)|\leqslant M'p_{N,L}(\psi\varphi)$$
$$\leqslant M'2^Np_{N,L}(\psi)p_{N,L}(\varphi)=Mp_{N,L}(\varphi).$$

② 由系 8.2③，$f\mapsto\psi f$ 是 $C^\infty(\Omega)\mapsto D(\Omega)$ 连续的，故 $f\mapsto\Lambda(\psi f)$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 上连续线性泛函。

定义 $\widetilde{\Lambda}(f)=\Lambda(\psi f)$，$f\in C^\infty(\Omega)$，

则 $\widetilde{\Lambda}$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函，当 $\varphi\in D(\Omega)$，$\widetilde{\Lambda}(\varphi)=\Lambda(\psi\varphi)=(\psi\Lambda)(\varphi)=\Lambda(\varphi)$，所以 $\widetilde{\Lambda}|_{D(\Omega)}=\Lambda$。因 $D(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中稠，故 $\widetilde{\Lambda}$ 是由 $\Lambda$ 唯一确定的。

§10.9 **定理** 定理 10.8② 的逆定理成立。即：如 $\Sigma$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 上的连续线性泛函，则 $\Sigma|_{D(\Omega)}$ 是有紧支集的广义函数。

［证］ 设 $\Sigma$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 上连续线性泛函，由定理 8.2⑧，$\Sigma|_{D(\Omega)}\in D'(\Omega)$，且存在数 $M$、$N$ 和 $\Omega$ 的紧子集 $K$，使得 $\forall f\in C^\infty(\Omega)$，

$$|\Sigma(f)|\leqslant Mp_{N,K}(f)=M\sup_{|\alpha|\leqslant N,x\in K}|D^\alpha f(x)|.$$

如 $\varphi\in D(\Omega)$，$\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega\setminus K$，则在 $K$ 上，$\varphi=0$，$D^\alpha\varphi=0$，所

以 $\Sigma(\varphi)=0$，因此 $\Sigma$ 的零化集 $\Omega_0\supset\Omega\setminus K$，即 $\Sigma$ 的支集 $\mathrm{supp}\,\Sigma=\Omega\setminus\Omega_0\subset K$，$\mathrm{supp}\,\Sigma$ 是紧集 $K$ 的(相对)闭子集，故是紧集。

§10.10 **引理** 设 $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，$N$ 是非负整数，令 $T=D_1\cdots D_d=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial}{\partial x_d}$，则存在常数 $L$，使

$$\forall\varphi\in D_K(\Omega),\ p_{N,K}(\varphi)\leqslant L\int_K|T^{N+1}\varphi(x)|dx。$$

［证］ 设 $Q$ 是边长为 $s$ 的 $d$ 维立方体，使 $Q\supset K$，$\forall\psi\in D_K(\Omega)$，可延拓成 $D_K(\Omega^d)$ 中的函数，即在 $\boldsymbol{R}^d\setminus\Omega$ 上定义 $\psi=0$。则 $\forall x\in Q$，

$$\psi(x)=\int_{y<x}(T\psi)(y)dy,$$

所以
$$|\psi(x)|\leqslant\int_Q|T\psi|=\int_K|T\psi|,$$

因此
$$\|\psi\|_K=\sup_{x\in K}|\psi(x)|\leqslant\int_K|T\psi| \qquad (10.10.1)$$

以上的 $\int_K|T\psi|$ 即表示 $\int_K|T\psi(x)|dx$。

$\forall x\in Q$，$\exists y\in\partial Q$（$Q$ 的边界），使 $\|x-y\|\leqslant s/2$，所以

$$|\psi(x)|=|\psi(x)-\psi(y)|\leqslant\frac{s}{2}|(D_i\psi)(z)|，其中\ z\in Q,$$

因此
$$\|\psi\|_K\leqslant\frac{s}{2}\|D_i\psi\|_K,$$

$$\|\psi\|_K\leqslant\left(\frac{s}{2}\right)^{|\beta|}\|D^\beta\psi\|_K \qquad (10.10.2)$$

设 $\alpha\in\boldsymbol{N}^d$ 且 $|\alpha|\leqslant N$，用 (10.10.2)，令 $\psi=D^\alpha\varphi$，$\beta=(N,\cdots,N)-\alpha$，得

$$\|D^\alpha\varphi\|_K\leqslant(s/2)^{Nd-|\alpha|}\|T^N\varphi\|_K。$$

故由 (10.10.1)，

$$\|D^\alpha\varphi\|_K \leqslant (s/2)^{Nd-|\alpha|}\int_K |T^{N+1}\varphi|,$$

对所有满足 $|\alpha|\leqslant N$ 的 $\alpha$ 取最大值,即得

$$p_{N,K}(\varphi)\leqslant L\int_K |T^{N+1}\varphi|。$$

§10.11 **引理** 设 $\Lambda$ 是 $D_K(\Omega)$ 上的连续线性泛函,即满足条件:存在数 $M,N$,对所有的 $\varphi\in D_K(\Omega)$,有

$$|\Lambda(\varphi)|\leqslant Mp_{N,K}(\varphi),$$

则存在一个 $K$ 上有界可测函数 $g$,使得

$$\forall\varphi\in D_K(\Omega),\Lambda(\varphi)=\int_K g(T^{N+1}\varphi)。$$

**[证]** 令 $E$ 是 $L^1(K)$ 的线性子空间 $T^{N+1}(D_K(\Omega))$。由引理10.10,如 $\varphi_1,\varphi_2\in D_K(\Omega)$,且 $T^{N+1}\varphi_1=T^{N+1}\varphi_2$,则有 $\Lambda(\varphi_1)=\Lambda(\varphi_2)$,因而在 $E$ 上可定义一个线性泛函如下:

如 $f\in E$,取任一满足 $T^{N+1}\varphi=f$ 的 $\varphi\in D_K(\Omega)$,定义 $\Pi(f)=\Lambda(\varphi)$。$\Pi(f)$ 的值与 $\varphi$ 的选取无关,而由 $f$ 唯一确定。

这样定义的 $\Pi$ 满足 $\Lambda=\Pi\circ T^{N+1}$。对所有的 $f\in E$,由引理10.10,有

$$|\Pi(f)|=|\Pi\circ T^{N+1}\varphi|=|\Lambda(\varphi)|\leqslant LM\int_K|T^{N+1}\varphi|$$
$$=LM\|f\|_1。$$

以上 $\|f\|_1$ 表示 $f$ 在 $L^1(K)$ 中的范数。

用 Hahn-Banach 定理,存在 $L^1(K)$ 上有界线性泛函 $\Sigma$,使得 $\Sigma|_E=\Pi$,且 $\|\Sigma\|\leqslant LM$。

由 $L^1$ 的对偶空间的表现定理,$\exists g\in L^\infty(K)$ 使得 $\|g\|_\infty\leqslant LM$,且 $\forall f\in L^1(K)$,

$$\Sigma(f)=\int_K fg,$$

所以 $\forall\varphi\in D_K(\Omega)$,

$$\Lambda(\varphi)=\Pi\circ T^{N+1}(\varphi)=\Sigma\circ T^{N+1}\varphi=\int_K g(T^{N+1}\varphi)。$$

§10.12 **定理** 设 $\Lambda$ 是 $D_K(\Omega)$ 上的连续线性泛函，即存在数 $M$、$N$，对所有的 $\varphi\in D_K(\Omega)$，$|\Lambda(\varphi)|\leqslant Mp_{N,K}(\varphi)$，则有 $f\in C(\Omega)$ 使得

$$\forall\varphi\in D_K(\Omega),\ \Lambda(\varphi)=\int_K f(T^{N+2}\varphi)。$$

［证］ 设 $g$ 是由引理 10.11 所确定的函数，延拓 $g$，在 $K$ 外令 $g=0$，令

$$f(x)=\int_{y>x} g(y)dy,\ x\in\Omega,$$

此 $f$ 即满足定理结论的要求。

# 第十一节 广义函数的阶、广义函数的结构

§11.1 **定义** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，如存在非负整数 $N$，使得对所有的紧子集 $K$，存在正常数 $M=M(K)$，对所有的 $\varphi\in D_K(\Omega)$，有

$$|\Lambda(\varphi)|\leqslant M(K)p_{N,K}(\varphi),$$

则称 $\Lambda$ 是**有限阶**的。具有上述性质的最小的 $N$ 称为 $\Lambda$ 的**阶**。

§11.2 **注** §9.3 中定义的 $\Lambda_f$ 和 $\Lambda_\mu$ 都是零阶广义函数。

§11.3 **定理** 如 $\Lambda\in D'(\Omega)$ 具有紧支集 supp $\Lambda$，则 $\Lambda$ 是有限阶的。

［证］ 由定理 10.8①。

§11.4 **系** 如 $\Lambda\in D'(\Omega)$，且 $\psi\in D(\Omega)$，则 $\psi\Lambda$ 有紧支集，因而是有限阶的。

§11.5 **定义** 如 $\xi\in\Omega$，定义 $\delta_\xi\in D'(\Omega)$ 如下：

$$\delta_\xi(\varphi)=\varphi(\xi),\ \varphi\in D(\Omega)。$$

由 §11.2，$\delta_\xi$ 是零阶广义函数。

§11.6 **引理** 设 $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n, \Lambda$ 都是线性空间 $X$ 上的线性泛函，则以下的 ①、②、③ 等价：

① 存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$\Lambda = \lambda_1 \Lambda_1 + \lambda_2 \Lambda_2 + \cdots + \lambda_n \Lambda_n。$$

② 存在正数 $r$，使 $\forall x \in X$，

$$|\Lambda(x)| \leqslant r \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Lambda_i(x)|。$$

③ $\Lambda_1(x) = \Lambda_2(x) = \cdots = \Lambda_n(x) = 0 \Rightarrow \Lambda(x) = 0$。

[证] ①⇒②，②⇒③ 显然。

③⇒① 设 $\boldsymbol{K}$ 是 $X$ 的纯量域，定义 $\pi: X \to \boldsymbol{K}^n$ 如下：

$$\pi(x) = (\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \cdots, \Lambda_n(x)),$$

如 $\pi(x) = \pi(x')$，则 $\Lambda_i(x - x') = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$，
故由 ③，$\Lambda(x - x') = 0$，$\Lambda(x) = \Lambda(x')$。

令 $\pi(X) = \{(\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_n(x)) \in \boldsymbol{K}^n : x \in X\}$，则 $\pi(X)$ 是 $\boldsymbol{K}^n$ 的线性子空间，在 $\pi(X)$ 上定义一个线性泛函 $F$ 如下：

如 $(u_1, \cdots, u_n) \in \pi(X)$，则 $\exists x \in X$，使 $(u_1, \cdots, u_n) = \pi(x) = (\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_n(X))$，定义 $F(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \Lambda(x)$，
$F$ 是可定义的，不依赖于 $x$ 的选取，且

$$(F \circ \pi)(x) = \Lambda(x), \quad \forall x \in X。$$

所以
$$F \circ \pi = \Lambda。$$

可把 $F$ 线性延拓到整个 $\boldsymbol{K}^n$，仍记作 $F$，则存在数 $\lambda_i \in \boldsymbol{K}, 1 \leqslant i \leqslant n$，使

$$F(u_1, \cdots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n, (u_1, \cdots, u_n) \in \boldsymbol{K}^n,$$

故
$$\Lambda(x) = F(\pi(x)) = F(\Lambda_1(x), \cdots, \Lambda_n(x)) = \lambda_1 \Lambda_1(x) + \cdots + \lambda_n \Lambda_n(x)。$$

所以
$$\Lambda = \lambda_1 \Lambda_1 + \cdots + \lambda_n \Lambda_n。$$

§11.7 **定理** 设 $\Lambda \in D'(\Omega)$，$\xi \in \Omega$ 且 $\operatorname{supp}\Lambda = \{\xi\}$，设 $\Lambda$ 是 $N$ 阶的，则对所有满足 $|\alpha| \leqslant N$ 的 $\alpha$，存在常数 $\lambda_\alpha$ 使

$$\Lambda = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \lambda_\alpha D^\alpha \delta_\xi.$$

〔证〕 由引理 11.6，只需证明：如 $\varphi \in D(\Omega)$，且对所有满足 $|\alpha| \leqslant N$ 的 $\alpha$，$(D^\alpha \delta_\xi)(\varphi) = 0$，则有 $\Lambda(\varphi) = 0$。

$\forall r > 0$，以 $\xi$ 为球心，$r$ 为半径的闭球 $\overline{B}(\xi, r)$ 简记作 $K_r$，取 $s > 0$，使 $K_s \subset \Omega$。由定义 11.1，$\exists M = M(s) > 0$，使

$$\forall \varphi \in D_{K_s}(\varphi),\ |\Lambda(\varphi)| \leqslant M p_{N, K_s}(\varphi).$$

设 $B$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中的闭单位球，取 $\psi \in D_B(R^d)$，使在 0 点的某邻域内 $\psi = 1$。

$\forall r \in (0, s]$，定义 $\psi_r \in D_{K_r}(\Omega)$ 如下：

$$\psi_r(x) = \psi\left(\frac{x - \xi}{r}\right),\ x \in \Omega.$$

因此在 $\operatorname{supp}\Lambda = \{\xi\}$ 的某开邻域中，$\psi_r = 1$。由引理 10.7③，$\psi_r \Lambda = \Lambda$。

这样，$\forall r \in (0, s]$，因 $\psi_r \varphi \in D_{K_s}(\Omega)$，

$$|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi_r \varphi)| \leqslant M p_{N, K_s}(\psi_r \varphi) = M p_{N, K_r}(\psi_r \varphi) \tag{11.7.1}$$

以上的 $M$ 与 $s$ 有关，与 $r$ 无关。

以下证明：当 $r \to 0$，$p_{N, K_r}(\psi_r \varphi) \to 0$ (11.7.2)

由 Taylor 定理，$\forall x \in K_r$，$\exists y \in [\xi, x]$ 使

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{N!} \sum_{|\alpha| = N} |C_\alpha D^\alpha \varphi(y)(x_1 - \xi_1)^{\alpha_1} \cdots (x_d - \xi_d)^{\alpha_d}|,$$

其中
$$C_\alpha = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d)!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!},$$

故
$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{N!} p_{N, K_r}(\varphi) \sum_{|\alpha| = N} C_\alpha |x_1 - \xi_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d - \xi_d|^{\alpha_d}$$

$$=\frac{1}{N!}p_{N,K_r}(\varphi)\left(\sum_{i=1}^{d}|x_i-\xi_i|\right)^N$$

$$\leqslant\frac{1}{N!}p_{N,K_r}(\varphi)d^{N/2}\|x-\xi\|^N$$

$$\leqslant\frac{1}{N!}d^{N/2}r^N p_{N,K_r}(\varphi).$$

所以 $$\|\varphi\|_{K_r}\leqslant\frac{1}{N!}d^{N/2}r^N p_{N,K_r}(\varphi).$$

类似的，如 $|\beta|\leqslant N$，则有

$$\|D^\beta\varphi\|_{K_r}\leqslant\frac{1}{(N-|\beta|)!}d^{(N-|\beta|)/2}r^{N-|\beta|}p_{N,K_r}(\varphi).$$

用 Leibniz 公式，

$$D^\alpha(\psi_r\varphi)=\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}\psi_r D^\beta\varphi,$$

其中 $$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_d!}{\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_d!(\alpha_1-\beta_1)!\cdots(\alpha_d-\beta_d)!}.$$

对所有满足 $|\alpha|\leqslant N$ 的 $\alpha$，

$$\|D^\alpha(\psi_r\varphi)\|_{K_r}\leqslant\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\|D^{\alpha-\beta}\psi_r\|_{K_r}\cdot\|D^\beta\varphi\|_{K_r}$$

$$\leqslant\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{1}{r^{|\alpha-\beta|}}p_{N,B}(\psi)d^{(N-|\beta|)/2}r^{N-|\beta|}p_{N,K_r}(\varphi)$$

$$=\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}d^{(N-|\beta|)/2}r^{N-|\alpha|}p_{N,B}(\psi)p_{N,K_r}(\varphi).$$

故存在与 $r$ 无关的常数 $a$，使 $\forall r\in(0,s]$，

$$p_{N,K_r}(\psi_r\varphi)\leqslant a p_{N,K_r}(\varphi);$$

因由假设对所有满足 $|\alpha|\leqslant N$ 的 $\alpha$，$(D^\alpha\varphi)(\xi)=0$，所以

$$p_{N,K_r}(\varphi)\to 0,\text{ 当 } r\to 0。$$

故(11.7.2)式成立。由(11.7.1)式，

$\Lambda(\varphi)=0$。定理 11.7 证毕。

§11.8 **定理** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$ 有紧支集 $\operatorname{supp}\Lambda$，且 $\Lambda$ 是 $N$ 阶的，又设 $V$ 是满足 $\operatorname{supp}\Lambda\subset V\subset\Omega$ 的任一开集，令 $\alpha$ 是 $d$ 重整数 $(N+2,\cdots,N+2)$，则对每一 $\beta\leqslant\alpha$，存在 $f_\beta\in C(\Omega)$，使 $\operatorname{supp} f_\beta\subset V$，且

$$\Lambda=\sum_{\beta\leqslant\alpha}D^\beta\Lambda_{f_\beta}。$$

〔证〕 取开集 $W$ 使 $\overline{W}$ 是紧集且满足 $\operatorname{supp}\Lambda\subset W\subset\overline{W}\subset V$。由定义 11.1，存在 $M=M(\overline{W})>0$，使得

$$\forall\varphi\in D_{\overline{W}}(\Omega),\ |\Lambda(\varphi)|\leqslant Mp_{N,\overline{W}}(\varphi)。$$

由引理 10.11 的证明和定理 10.12，存在 $f\in C(\Omega)$ 使得

$$\forall\varphi\in D_{\overline{W}}(\Omega),\quad \Lambda(\varphi)=\int_\Omega f(T^{N+2}\varphi)。$$

由单位分解定理 8.4③，存在 $\psi\in D(\Omega)$，在 $\operatorname{supp}\Lambda$ 的某开邻域上 $\psi=1$，且 $\operatorname{supp}\psi\subset W$。由引理 10.7③，

$\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$\Lambda(\varphi)=\Lambda(\psi\varphi)=\int_\Omega f(T^{N+2}(\psi\varphi))$$

$$=\int_\Omega fD^\alpha(\psi\varphi)。$$

由 Leibniz 公式，

$$\Lambda(\varphi)=\int_\Omega f\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}\psi\cdot D^\beta\varphi,$$

令 $$f_\beta=(-1)^{|\beta|}\binom{\alpha}{\beta}fD^{\alpha-\beta}\psi,\text{ 则}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(\varphi)&=\sum_{\beta\leqslant\alpha}(-1)^{|\beta|}\int_{\Omega}f_{\beta}D^{\beta}\varphi\\&=\sum_{\beta\leqslant\alpha}(-1)^{|\beta|}\Lambda_{f_{\beta}}(D^{\beta}\varphi)\\&=\sum_{\beta\leqslant\alpha}(D^{\beta}\Lambda_{f_{\beta}})(\varphi),\end{aligned}$$

所以 $$\Lambda=\sum_{\beta\leqslant\alpha}D^{\beta}\Lambda_{f_{\beta}}。$$

且 $$\operatorname{supp}f_{\beta}\subset W\subset V。$$

§11.9 **定理** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，则对每一 $d$ 重整数 $\alpha$，存在 $g_{\alpha}\in C(\Omega)$，且对 $\Omega$ 的任一紧子集 $K$，存在 $d$ 重整数 $\beta_K$，使得

① $\operatorname{supp}\ g_{\alpha}\cap K\neq\phi\Rightarrow\alpha\leqslant\beta_K$；

② $\forall\varphi\in D(\Omega)$，$\Lambda(\varphi)=\sum_{\alpha}(D^{\alpha}\Lambda_{g_{\alpha}})(\varphi)$ (11.9.1)

[注] 如 $\alpha\not\leqslant\beta_{\operatorname{supp}\varphi}$，则 $\operatorname{supp}\ g_{\alpha}\cap\operatorname{supp}\varphi=\phi$，则 $(D^{\alpha}\Lambda_{g_{\alpha}})(\varphi)=0$，所以(11.9.1)的右端是有限和。

[证] 由单位分解定理8.4及其注，对任一自然数 $i$，可取闭球 $\bar{B}_i\subset\Omega$，使得 $V_i$ 是半径为其一半的同心开球，而 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i$，且对 $\Omega$ 的所有紧子集 $K$，存在 $n(K)$，使得

$$i>n(K)\Rightarrow\bar{B}_i\cap K=\phi,$$

且存在 $\psi_i\in D(\Omega)$，$0\leqslant\psi_i\leqslant1$，$\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i=1$，$\operatorname{supp}\psi_i\subset B_i$，对 $\Omega$ 的紧子集 $K$，存在开集 $W_K$，使 $K\subset W_K\subset\Omega$，存在正整数 $m_K$，使在 $W_K$ 上，

$$\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_{m_K}=1,$$

而当 $i>m_K$，则在 $W_K$ 上 $\psi_i=0$。

因 $\overline{W}_K\subset\operatorname{supp}(\psi_1+\cdots+\psi_{m_K})$，而

$$\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_{m_K}\in D(\Omega),$$

故 $\overline{W}_K$ 是 $\Omega$ 的紧子集。

由系11.4，对所有的 $i$，

$$\operatorname{supp}\psi_i\Lambda\subset\operatorname{supp}\psi_i\subset B_i,$$

因而，由定理 11.8，$\exists d$ 重整数 $\alpha_i$，使 $\forall \alpha \leqslant \alpha_i$，$\exists f_{i,\alpha} \in C(\Omega)$，使 $\text{supp} f_{i,\alpha} \subset B_i$，且

$$\psi_i \Lambda = \sum_{\alpha < \alpha_i} D^\alpha \Lambda_{f_{i,\alpha}},$$

记 $$l = n(\overline{W}_K),$$

定义 $$\beta_K = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_l = \max(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l)。$$

以上 max 是对 $d$ 重整数集合 $N^d$ 上的半序"$\leqslant$"取的。如 $\alpha = (a_1, \cdots, a_d)$，$\beta = (b_1, \cdots, b_d)$ 则 $\alpha \vee \beta = (\max(a_1, b_1), \cdots, \max(a_d, b_d))$。

如 $\alpha \not\leqslant \alpha_i$，令 $f_{i,\alpha} = 0$。

① 固定 $\alpha$，如 $K$ 是 $\Omega$ 的紧子集，则

$i > n(K) \Rightarrow B_i \cap K = \phi \Rightarrow \text{supp} f_{i,\alpha} \cap K = \phi \Rightarrow$ 在 $K$ 上 $f_{i,\alpha} = 0$。

因而 $g_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}$ 在 $\Omega$ 的任一紧子集 $K$ 上是有限和，因而是有定义的，且在 $\Omega$ 上连续。在 $\overline{W}_K$ 上，记 $l = n(\overline{W}_K)$，

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^{l} f_{i,\alpha}。$$

设 $\text{supp}\, g_\alpha \cap K \neq \phi$，则存在 $x \in \text{supp}\, g_\alpha \cap K \subset \text{supp}\, g_\alpha \cap W_K$，必存在 $i \in \{1, \cdots, l\}$ 使 $x \in \text{supp}\, f_{i,\alpha}$。如果不然，对所有的 $i = 1, 2, \cdots, l$，$x \bar{\in} \text{supp}\, f_{i,\alpha}$，存在 $x$ 的邻域 $U_i(x) \cap \text{supp}\, f_{i,\alpha} = \phi$，由于 $W_K$ 是 $x$ 的邻域，不妨设 $U_i(x) \subset W_K$，$\bigcap_{i=1}^{l} U_i(x) = U(x)$ 仍是 $x$ 的邻域，$\forall i \in \{1, \cdots, l\}$，在 $U(x)$ 上，$f_{i,\alpha} = 0$，因而 $g_\alpha = 0$，与 $x \in \text{supp} g_\alpha$ 矛盾。所以一定存在某 $i \in \{1, \cdots, l\}$ 使 $x \in \text{supp}\, f_{i,\alpha}$ 因而 $\alpha \leqslant \alpha_i$，从而 $\alpha \leqslant \beta_K$。

② 设 $\varphi \in D(\Omega)$，令 $K = \text{supp}\, \varphi$，对所有的 $\alpha$，

$$g_\alpha D^\alpha \varphi = \sum_{i=1}^{l} f_{i,\alpha} D^\alpha \varphi。$$

因而 $(D^\alpha \Lambda_{g_\alpha})(\varphi)=\sum_{i=1}^{l}(D^\alpha \Lambda_{f_{i,\alpha}})(\varphi)$,

$$\sum_{\alpha\leqslant\beta_K}(D^\alpha \Lambda_{g_\alpha})(\varphi)=\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{\alpha\leqslant\beta_K}D^\alpha \Lambda_{f_{i,\alpha}}\Big)(\varphi),$$

$\forall i\in\{1,\cdots,l\}$,

如 $\alpha_i\leqslant\beta_K$，且 $\alpha\not\leqslant\alpha_i$，则有 $f_{i,\alpha}=0$。

故 $$\sum_{\alpha\leqslant\beta_K}(D^\alpha \Lambda_{g_\alpha})(\varphi)=\sum_{i=1}^{l}\Big(\sum_{\alpha\leqslant\alpha_i}D^\alpha \Lambda_{f_{i,\alpha}}\Big)(\varphi)$$

$$=\sum_{i=1}^{l}(\psi_i\Lambda)(\varphi)=\Lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi\Big)。$$

取正整数 $p$ 使 $p\geqslant m_K$，且 $p\geqslant l=n(\overline{W}_K)$，则当 $i>l=n(\overline{W}_K)$，

$$\operatorname{supp}\psi_i\cap\operatorname{supp}\varphi\subset B_i\cap K\subset B_i\cap\overline{W}_K=\phi,\ \psi_i\varphi=0,$$

当 $i>m_K$，$\psi_i\varphi=0$，

所以 $$\Lambda\Big(\sum_{i=1}^{l}\psi_i\varphi\Big)=\Lambda\Big(\sum_{1}^{p}\psi_i\varphi\Big)=\Lambda\Big(\sum_{i=1}^{m_K}\psi_i\varphi\Big)=\Lambda(\varphi)。$$

§11.10 **定理** 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$，且 $\Lambda$ 是 $N$ 阶的，则对所有的 $\alpha\leqslant(N+2,\cdots,N+2)$，存在 $g_\alpha\in C(\Omega)$，使

$$\Lambda=\sum_{\alpha\leqslant(N+2,\cdots,N+2)}D^\alpha \Lambda_{g_\alpha}。$$

［证］ 广义函数 $\psi_i\Lambda$ 的阶数 $\leqslant N$，所以由定理 11.8，在定理 11.9 的证明中可取所有的 $\alpha_i=(N+2,\cdots,N+2)$，即推出本定理的结论。

## 第十二节 广义函数的收敛性

### §12.1 $D'(\Omega)$ 上的拓扑

对线性空间 $D'(\Omega)$，赋予弱 * 拓扑 $\sigma(D'(\Omega),D(\Omega))$。即对 $D(\Omega)$ 中任一有限集 $F=\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$，定义

$$p_F(\Lambda)=p_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n}(\Lambda)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Lambda(\varphi_i)|,\quad \Lambda\in D'(\Omega),$$

则 $p_F$ 是 $D'(\Omega)$ 上的半范，

令 $$P=\{p_F: F \text{ 为 } D(\Omega)\text{中的有限集}\},$$

则 $P$ 是$D'(\Omega)$上的半范基，由半范基可生成局部凸空间$(D'(\Omega),H(P))$；此即是 $D'(\Omega)$上的弱*拓扑 $\sigma(D'(\Omega),D(\Omega))$。如用网的收敛性来表达：

网 $\Lambda_r \to \Lambda \Longleftrightarrow \forall\varphi\in D(\Omega), \Lambda_r(\varphi)\to\Lambda(\varphi)$。

对任意固定的$\varphi\in D(\Omega)$，如记

$$J_\varphi(\Lambda)=\Lambda(\varphi),\ \Lambda\in D'(\Omega),$$

则 $J_\varphi$ 是 $D'(\Omega)$ 上的线性泛函，则以上定义的 $D'(\Omega)$ 上的拓扑是使所有 $J_\varphi(\varphi\in D(\Omega))$连续的最弱的拓扑，因而记作 $\sigma(D'(\Omega),D(\Omega))$。

在定理 11.9 中的 $\Lambda=\sum_\alpha D^\alpha\Lambda_{g_\alpha}$ 以及 $\Lambda\to\sum_{i=1}^\infty\psi_i\Lambda$，无穷级数按以上定义的 $D'(\Omega)$ 的拓扑收敛。

§12.2 **引理** 对所有的 $\alpha\in N^d$，映射 $\Lambda\mapsto D^\alpha\Lambda$ 是 $D'(\Omega)\mapsto D'(\Omega)$ 的连续线性映射。

［证］ 对任意的自然数 $n,\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in D(\Omega)$，

$$p_{\varphi_1,\cdots,\varphi_n}(D^\alpha\Lambda)=\max_{1<i<n}|D^\alpha\Lambda(\varphi_i)|$$
$$=\max_{1<i<n}|\Lambda(D^\alpha\varphi_i)|=p_{D^\alpha\varphi_1,\cdots,D^\alpha\varphi_n}(\Lambda)。$$

§12.3 **定理** 设 $\{\Lambda_n\}$ 是 $D'(\Omega)$ 中的序列，且设 $\forall\varphi\in D(\Omega)$，$\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(\varphi)$存在，则有 $\Lambda\in D'(\Omega)$，使对所有的 $\alpha\in N^d$，按$D'(\Omega)$ 的拓扑，$D^\alpha\Lambda_n\to D^\alpha\Lambda$。

［证］ $\forall\varphi\in D(\Omega)$，定义 $\Lambda(\varphi)=\lim_{n\to\infty}\Lambda_n(\varphi)$，显然 $\Lambda$ 是 $D(\Omega)$上的线性泛函。设$K$ 是 $\Omega$ 的任一紧子集，则 $\forall\varphi\in D_K(\Omega)$，

$$\Lambda_n|_{D_K(\Omega)}(\varphi)\to\Lambda|_{D_K(\Omega)}(\varphi),$$

但 $D_K(\Omega)$ 是 Frechet 空间，由 §2.11 的 Banach-Steinhauss 定理，$\Lambda|_{D_K(\Omega)}$ 在 $D_K(\Omega)$ 连续，所以 $\Lambda\in D'(\Omega)$，由引理 12.2，

$D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$。

§12.4 **定理** 如在 $D'(\Omega)$ 中，$\Lambda_n \to \Lambda_0$，在 $C^\infty(\Omega)$ 中 $f_n \to f_0$，则在 $D'(\Omega)$ 中 $f_n\Lambda_n \to f_0\Lambda_0$。

［证］ 任意固定 $\varphi \in D(\Omega)$，$\forall f \in C^\infty(\Omega)$，由 $D'(\Omega)$ 的拓扑的定义，映射 $\Lambda \mapsto \Lambda(f\varphi)$ 是 $D'(\Omega) \mapsto \boldsymbol{C}$（复数域）的连续线性映射。另一方面，对每一固定的 $\Lambda \in D'(\Omega)$，映射 $f \mapsto \Lambda(f\varphi)$ 由系8.3③是 $C^\infty(\Omega) \mapsto \boldsymbol{C}$ 的连续线性映射。故映射

$(\Lambda, f) \mapsto \Lambda(f\varphi)$ 是 $D'(\Omega) \times C^\infty(\Omega) \mapsto \boldsymbol{C}$ 的双线性映射且分别连续。

因 $C^\infty(\Omega)$ 是 Frechet 空间，由 §2.12 关于双线性映射的定理，

$$\Lambda_n(f_n\varphi) \to \Lambda_0(f_0\varphi),$$

即 $$(f_n\Lambda_n)(\varphi) \to (f_0\Lambda_0)(\varphi), \forall \varphi \in D(\Omega),$$

由 $D'(\Omega)$ 的拓扑的定义，在 $D'(\Omega)$ 中，

$$f_n\Lambda_n \to f_0\Lambda_0。$$

## 第十三节 卷 积

§13.1 **定义** 如 $u$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上函数，$x \in \boldsymbol{R}^d$，定义**平移映射** $\tau_x$ 如下：

$$(\tau_x u)(y) = u(y-x), \quad y \in \boldsymbol{R}^d$$

定义关于零点的**对称映射**（反转）$\vee$ 如下：

$$\check{u}(y) = u(-y), \quad y \in \boldsymbol{R}^d,$$

则 $$\tau_x: C^\infty \mapsto C^\infty, \quad \tau_x: D \mapsto D,$$

$$\vee: C^\infty \mapsto C^\infty, \quad \vee: D \mapsto D,$$

对相应的拓扑都是连续的。以上 $C^\infty = C^\infty(R^d)$，$D = D(R^d)$。

§13.2 **定义** 设 $x \in \boldsymbol{R}^d$，$\Lambda \in D' = D'(R^d)$，定义

$$(\tau_x \Lambda)(\varphi) = \Lambda(\tau_{-x}\varphi), \quad \varphi \in D,$$

则 $\tau_x\Lambda\in D'$。如 $\Lambda$ 有紧支集，则 $\tau_x\Lambda$ 也有紧支集。

§13.3 **定义** 如果 $\Lambda\in D', \varphi\in D$ (13.3.1)

或 $\Lambda\in D'$ 有紧支集(即 $(\Lambda\in(C^\infty)')$，$\varphi\in C^\infty$ (13.3.2)

则由下式定义 $\boldsymbol{R}^d$ 上的数值函数 $\Lambda*\varphi$：

$$(\Lambda*\varphi)(x)=\Lambda(\tau_x\check{\varphi}),\quad x\in\boldsymbol{R}^d,$$

$\Lambda*\varphi$ 称为广义函数 $\Lambda$ 与普通函数 $\varphi$ 的**卷积**。

注意：当条件(13.3.2)满足时，$\tau_x\check{\varphi}\in C^\infty$，$\Lambda(\tau_x\check{\varphi})$ 理解为根据定理10.8②，把 $\Lambda$ 唯一确定地延拓成 $C^\infty$ 上的连续线性泛函，此延拓仍记成 $\Lambda$。

如 $x_n\to x$，则 $\tau_{x_n}\check{\varphi}\to\tau_x\check{\varphi}$，按 $D$ 或 $C^\infty$ 的拓扑。因而 $\Lambda(\tau_{x_n}\check{\varphi})\to\Lambda(\tau_x\check{\varphi})$ 即

$$(\Lambda*\varphi)(x_n)\to(\Lambda*\varphi)(x),$$

所以 $\Lambda*\varphi$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上连续。

§13.4 **引理** ① 如 $f$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 中局部可积，且 $\varphi\in D$，则

$$\Lambda_f*\varphi=f*\varphi \qquad (13.4.1)$$

上面的 $f*\varphi$ 即普通函数的卷积

$$(f*\varphi)(x)=\int_{R^d}f(y)\varphi(x-y)\,dy。$$

② 如 $f$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 可积，在某紧集外为 0，$\varphi\in C^\infty$，则(13.4.1)仍成立。

[证] $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$(\Lambda_f*\varphi)(x)=\Lambda_f(\tau_x\check{\varphi})=\int_{R^d}f(y)(\tau_x\check{\varphi})(y)dy$$

$$=\int_{R^d}f(y)\varphi(x-y)dy=(f*\varphi)(x)。$$

§13.5 **定理** 设 $x\in\boldsymbol{R}^d$，(13.3.1) 或 (13.3.2) 成立，则

① $\tau_x(\Lambda*\varphi)=(\tau_x\Lambda)*\varphi=\Lambda*(\tau_x\varphi)$；

② $\Lambda*\varphi\in C^\infty$，且对所有的 $\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，

$$D^{\alpha}(\Lambda * \varphi) = (D^{\alpha}\Lambda) * \varphi = \Lambda * (D^{\alpha}\varphi)。$$

［证］ 设(13.3.1)成立。

① $\forall y \in \boldsymbol{R}^d$，

$$\tau_{y-x}\check{\varphi} = \tau_{-x}(\tau_y\check{\varphi}) = \tau_y(\tau_x\varphi)^{\vee},$$

所以 $\Lambda(\tau_{y-x}\check{\varphi}) = \Lambda(\tau_{-x}(\tau_y\check{\varphi})) = \Lambda(\tau_y(\tau_x\varphi)^{\vee})$

即 $(\Lambda * \varphi)(y-x) = (\tau_x\Lambda)(\tau_y\check{\varphi}) = (\Lambda * \tau_x\varphi)(y)$，

即 $(\tau_x(\Lambda * \varphi))(y) = ((\tau_x\Lambda) * \varphi)(y) = (\Lambda * \tau_x\varphi)(y)$，

所以 $\tau_x(\Lambda * \varphi) = (\tau_x\Lambda) * \varphi = \Lambda * (\tau_x\varphi)$。

② 设 $i \in \{1, \cdots, d\}$，$e_i$ 是第 $i$ 个坐标为 1，其余为 0 的 $d$ 维单位向量，$K = \operatorname{supp}\varphi$，记 $L = K + \overline{B}(0,1)$，实数 $h$ 满足 $0 < |h| < 1$，

定义
$$\rho_h = \frac{\tau_{-he_i}\varphi - \varphi}{h} - D_i\varphi,$$

显然 $\rho_h \in D_L = D_L(\boldsymbol{R}^d)$，由 Taylor 定理，

$$p_{N,L}(\rho_h) \leqslant \frac{|h|}{2} p_{N+2,K}(\varphi),$$

因而当 $h \to 0$，在 $D_L$ 中 $\rho_h \to 0$，所以在 $D$ 中也成立。因 $\tau_x$ 是连续的，故在 $D$ 中，$\tau_x\rho_h \to 0$，当 $h \to 0$，由此 $\Lambda(\tau_x\rho_h) \to 0$，把 $\varphi$ 换成 $\check{\varphi}$，得到当 $h \to 0$ 时，

$$\frac{\Lambda(\tau_{x+he_i}\check{\varphi}) - \Lambda(\tau_x\check{\varphi})}{h} \to -\Lambda(\tau_x D_i\check{\varphi}),$$

即
$$\frac{(\Lambda * \varphi)(x + he_i) - (\Lambda * \varphi)(x)}{h} \to -\Lambda(\tau_x D_i\check{\varphi}),$$

而
$$\begin{aligned} -\Lambda(\tau_x D_i\check{\varphi}) &= -\Lambda(D_i\tau_x\check{\varphi}) \\ &= (D_i\Lambda)(\tau_x\check{\varphi}) \\ &= (D_i\Lambda * \varphi)(x), \end{aligned}$$

还有 $-\Lambda(\tau_x D_i \check{\varphi}) = -\Lambda(D_i \tau_x \check{\varphi})$

$$= \Lambda(\tau_x (D_i \varphi)^{\vee})$$

$$= (\Lambda * D_i \varphi)(x),$$

所以 $D_i(\Lambda * \varphi) = (D_i \Lambda) * \varphi = \Lambda * (D_i \varphi)$.

用数学归纳法可证得

$D^\alpha(\Lambda * \varphi) = (D^\alpha \Lambda) * \varphi = \Lambda * (D^\alpha \varphi)$。

在(13.3.2)的假设下类似地可证明 ①、②。

§ 13.6 **定理** ① 设 $\Lambda \in D'$，则 $\varphi \mapsto \Lambda * \varphi$ 是 $D \mapsto C^\infty$ 的连续线性映射。

② 如 $\Lambda \in (C^\infty)'$，则 $\varphi \mapsto \Lambda * \varphi$ 是 $C^\infty \mapsto C^\infty$ 的连续线性映射。

[证] 设 $K$ 为 $\boldsymbol{R}^d$ 中任一紧集，$\varphi_n, \varphi \in D_K$，在 $D_K$ 中 $\varphi_n \to \varphi$，且 $\Lambda * \varphi_n \to f$ 在$C^\infty$ 中成立，则 $\forall x \in \boldsymbol{R}^d$，

$$\tau_x \check{\varphi}_n \to \tau_x \check{\varphi} \quad \text{在 } D \text{ 中成立},$$

因而$(\Lambda * \varphi_n)(x) = \Lambda(\tau_x \check{\varphi}_n) \to \Lambda(\tau_x \check{\varphi}) = (\Lambda * \varphi)(x)$，

这样 $\Lambda * \varphi_n \to \Lambda * \varphi$，在 $\boldsymbol{R}^d$ 上点点收敛，因而 $\Lambda * \varphi = f$。

以上证明了 $\varphi \mapsto \Lambda * \varphi$是 $D_K \mapsto C^\infty$ 的闭线性映射。因 $D_K$ 和 $C^\infty$ 都是 Frechet 空间，由闭图象定理（§ 2.13）推出 $\varphi \mapsto \Lambda * \varphi$ 是 $D_K \mapsto C^\infty$ 中的连续线性映射. 因 $K$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的任意紧集，由定理 8.2①，$\varphi \mapsto \Lambda * \varphi$ 是 $D \mapsto C^\infty$ 的连续线性映射。

② 的证明类似于 ①，但不需用归纳限拓扑。

§ 13.7 **定理** ① 设 $\Lambda \in D'$，则映射 $L: \varphi \mapsto \Lambda * \varphi$ 是 $D \mapsto C^\infty$ 中的与平移可交换的连续线性映射，即满足：

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^d, \ \tau_x L = L \tau_x \tag{13.7.1}$$

② 如 $L: D \mapsto C(\boldsymbol{R}^d)$ 是满足(13.7.1)的连续线性映射，则存在唯一的 $\Lambda \in D'$，使得

$$\forall \varphi \in D, L\varphi = \Lambda * \varphi,$$

因而 $L(D) \subset C^\infty$。

［证］ ① 由定理13.6①和定理13.5①推出。

② 令 $\Lambda=\delta_0\circ L\circ{}^{\vee}\in D'$，则 $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$\begin{aligned}(\Lambda*\varphi)(x)&=\Lambda(\tau_x\check{\varphi})=\delta_0 L(\tau_x\check{\varphi})^{\vee}\\&=\delta_0 L\tau_{-x}\varphi=\delta_0\tau_{-x}L\varphi=(L\varphi)(x),\end{aligned}$$

所以
$$\Lambda*\varphi=L_{\circ}$$

唯一性：$\forall\varphi\in D,\Lambda_1*\varphi=\Lambda_2*\varphi$，则 $(\Lambda_1*\check{\varphi})(0)=(\Lambda_2*\check{\varphi})(0)$，即 $\Lambda_1(\varphi)=\Lambda_2(\varphi)$，所以 $\Lambda_1=\Lambda_2$。

§13.8 **定义** 设 $X$ 是线性空间，$X^*$ 是 $X$ 的代数对偶，即 $X$ 上线性泛函全体所组成的线性空间，对 $X^*$ 赋予局部凸拓扑 $\sigma(X^*,X)$，即对 $X$ 中任一有限集 $F=\{x_1,\cdots,x_n\}$，定义 $X'$ 上的半范，

$$p_F(x')=p_{x_1,\cdots,x_n}(x')=\max_{1<i<n}|x'(x_i)|,x'\in X^*,$$

$$P=\{p_F:F\text{ 为 }X\text{ 的有限集}\},$$

则 $P$ 是 $X^*$ 上的半范基，局部凸空间 $(X^*,\ H(P))$ 的拓扑称为 $\sigma(X^*,X)$ 拓扑（弱＊拓扑）。

如果 $x\in X,J(x)$ 表示由下式定义的 $X^*$ 上的线性泛函：

$$(J(x))(x')=x'(x),\qquad x'\in X^*。$$

则 $\sigma(X^*,X)$ 是 $X^*$ 上使所有 $J(x)(x\in X)$ 连续的最弱的拓扑。

$J$ 称为 $X\mapsto X^{**}$ 中的**典则映射**。

§13.9 **引理** 设 $X^*$ 取弱＊拓扑 $\sigma(X^*,X)$，$(X^*)'$ 是 $X^*$ 的拓扑对偶空间，即 $X^*$ 上连续线性泛函的全体组成的线性空间，$J$ 是 $X\mapsto X^{**}$ 的典则映射，则

$$(X^*)'=J(X)。$$

［证］ 显然，$\forall x\in X$，

$$|(J(x))(x')|=|x'(x)|=p_x(x'),$$

所以
$$J(x)\in(X^*)',J(X)\subset(X^*)'。$$

反之，$\forall\xi\in(X^*)'$，$\exists\ p_{x_1,\cdots,x_n}\in P$，使 $\forall x'\in X^*$，

$$|\xi(x')|\leqslant p_{x_1,\cdots,x_n}(x')=\max_{1<i<n}|x'(x_i)|=\max_{1<i<n}|J(x_i)(x')|。$$

$\xi,J(x_i)$都是$X^*$上的线性泛函，由引理 11.6，$\exists\lambda_i\in\boldsymbol{K}$，使

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i J(x_i)=J\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\right)$$

而 $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\in X,\quad 所以\xi\in J(X),$$

因此 $(X^*)'\subset J(X)$， $(X^*)'=J(X)$。

§13.10 **引理** 设$X$是局部凸空间$(X,H)$，$X'$是$X$的拓扑对偶空间，$Y=(X')^*$是$X'$的代数对偶空间，对$Y$赋予弱＊拓扑$\sigma(Y,X')$，即$Y$上的半范基为

$$Q=\{p_{x'_1,\cdots,x'_n}:n\in\mathcal{N},x'_1,\cdots,x'_n\in X'\},$$

其中 $p_{x'_1,\cdots,x'_n}(x'')=\max\limits_{1<i<n}|x''(x'_i)|,x''\in(X')^*=Y$，

则典则映射$J:X\mapsto(X')^*=Y$是$(X,H)\mapsto(Y,H(Q))$的连续线性映射。

［**证**］ $\forall p_{x'_1,\cdots,x'_n}\in Q,\forall x\in X$，

$$p_{x'_1,\cdots,x'_n}(J(x))=\max_{1<i<n}|J(x)(x'_i)|=\max_{1<i<n}|x'_i(x)|,$$

因$x'_i\in X'$，所以$\exists\ p_i\in H$使

$|x'_i(x)|\leqslant p_i(x)$，$1\leqslant i\leqslant n$，代入上式，得：

$$p_{x'_1,\cdots,x'_n}(J(x))\leqslant\max_{1<i<n}p_i(x)=(p_1\vee\cdots\vee p_n)(x)。$$

因$H$是$X$上半范系，$p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n\in H$，故$J$是$(X,H)\mapsto(Y,Q)$连续的，因而也是$(X,H)\mapsto(Y,H(Q))$连续的。

§13.11 **定理** 设$C$是局部凸空间$X$中的紧凸子集，$\xi$是$X$的拓扑对偶空间$X'$上的线性泛函，且满足条件：

$$\forall x'\in X',$$

$$\mathrm{Re}\xi(x')\leqslant\sup\ \mathrm{Re}x'(C)=\sup_{x\in C}\ \mathrm{Re}x'(x),$$

则$\exists x\in C$，使$\forall x'\in X'$，$\xi(x')=x'(x)$。

［**证**］ 记$Y=(X')^*$，设$J$是$X\mapsto Y$的典则映射，由引理

13.10]$J$ 是 $X\mapsto(Y,H(Q))$ 连续的，所以 $J(C)$ 在 $(Y,H(Q))$ 中紧，因 $(Y,H(Q))$ 的拓扑即弱*拓扑 $\sigma((X')^*,X')$，是 Hausdorff 拓扑，所以 $J(C)$ 在 $(Y,H(Q))$ 中闭，且也是凸的。由假设，$\forall x'\in X'$，

$$\operatorname{Re}\xi(x')\leqslant\sup_{x\in C}\operatorname{Re}x'(x)=\sup_{x\in C}\operatorname{Re}(J(x))(x')$$
$$=\sup\operatorname{Re}J(C)(x')。$$

如 $\xi\bar{\in}J(C)$，由 § 3.17 的凸集分离定理，$\exists Y$ 上的连续线性泛函 $\Lambda$ 使

$$\operatorname{Re}\Lambda(\xi)>\sup\operatorname{Re}\Lambda(J(C))=\sup_{\eta\in J(C)}\operatorname{Re}\Lambda(\eta)\quad(13.11.1)$$

但由引理 13.9，$\exists x'\in X'$ 使 $\Lambda=J'(x')$，其中 $J'$ 是 $X'\mapsto(X')^{**}$ 的典则映射，即

$$\Lambda(\xi)=J'(x')(\xi)=\xi(x'),\Lambda(\eta)=\eta(x'),$$

(13.11.1)变形为

$$\operatorname{Re}\xi(x')>\sup_{\eta\in J(C)}\operatorname{Re}\eta(x')=\sup_{x\in C}\operatorname{Re}J(x)(x')=\sup_{x\in C}\operatorname{Re}x'(x),$$

与假设矛盾。所以 $\xi\in J(C)$，即 $\exists x\in C$，使 $\xi=J(x)$，即

$$\forall x'\in X,\xi(x')=(J(x))(x')=x'(x)。$$

证毕。

§ 13.12 **定理** 设 $s\in\boldsymbol{R}^d,f:s\mapsto g_s$ 是 $\boldsymbol{R}^d\mapsto D$ 的连续映射（一般的是非线性的），且当 $s$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 的某紧子集 $M$ 外时，$g_s=0$，则存在唯一的 $\rho\in D$，使

$$\forall\Lambda\in D',\Lambda(\rho)=\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds。$$

［证］ $\forall\Lambda\in D',s\mapsto\Lambda(g_s)$ 是 $\boldsymbol{R}^d\mapsto\boldsymbol{C}$ 的连续映射，且在 $M$ 外为 0，所以 $\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds$ 存在，此积分作为 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 Riemann 积分和 Lebesque 积分都是存在的，且

$$\mathrm{Re}\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds=\mathrm{Re}\int_M\Lambda(g_s)ds\leqslant\mu(M)\sup_{s\in M}\mathrm{Re}\ \Lambda(g_s),$$

其中 $\mu(M)$ 是 $M$ 的 Lebesque 测度。又 $\{g_s:s\in M\}=f(M)$ 是紧集 $M$ 的连续像，因而是 $D$ 中的紧子集，记 $C=\overline{\mathrm{Co}}f(M)$，即 $f(M)$ 的闭凸包。由泛函分析中的定理（§3.18）：完备的局部凸空间中，紧集的闭凸包是紧集，故

$$\mathrm{Re}\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds\leqslant\mu(M)\sup\mathrm{Re}\ \Lambda(C)$$
$$=\sup\mathrm{Re}\ \Lambda(\mu(M)C),$$

用定理 13.11，其中 $\xi(\Lambda)=\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds,(\Lambda\in D')$，$\xi$ 是 $D'$ 上的线性泛函，则 $\exists\rho\in\mu(M)C$，使

$$\forall\Lambda\in D',\Lambda(\rho)=\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds。$$

§13.13 **附注** 以上定理中的 $\rho$ 称为向量值函数 $f:\boldsymbol{R}^d\mapsto D$ 的弱积分，记成

$$\rho=\int_{R^d}g_s\,ds\text{ 或 }\rho=\int_{R^d}f(s)ds。$$

从以上的证明中可看出，可证明以下的关于向量值函数的弱积分的定理。

**定理** 设 $(a)$ $X$ 是拓扑线性空间，其拓扑对偶空间 $X'$ 能分离 $X$ 的点，即对 $X$ 中任意两个不同的点 $x$、$y$，存在 $x'\in X'$，使 $x'(x_1)\neq x'(x_2)$；

$(b)$ $\mu$ 是紧 $T_2$ 型空间 $Y$ 上的有限正 Borel 测度；

$(c)$ $f:Y\mapsto X$ 是连续映射；

$(d)$ $f(Y)$ 的闭凸包 $C$ 是紧的，

则弱积分 $\rho=\int_Y f\,d\mu$ 存在，且 $\rho\in\mu(Y)C$，即 $\forall\Lambda\in X'$，

$$\Lambda(\rho)=\int_Y(\Lambda f)(y)d\mu(y)。$$

如果 $X$ 是 $T_2$ 型局部凸空间，则条件 $(a)$ 自然满足（由 §3.17 凸集分离定理），如果 $X$ 是完备的局部凸空间，则条件 $(d)$ 自然满足。

§3.14 **定理** ① 如 $\Lambda\in D'$，$\varphi\in D$，$\psi\in D$，则

$$\Lambda*(\varphi*\psi)=(\Lambda*\varphi)*\psi=(\Lambda*\psi)*\varphi \qquad (13.14.1)$$

② 如 $\Lambda\in D'$ 且有紧支集，$\psi\in D$，则

$\Lambda*\psi\in D$，$\psi\mapsto\Lambda*\psi$ 是 $D\mapsto D$ 的连续线性映射。

③ 如 $\Lambda\in D'$ 且有紧支集，$\varphi\in C^\infty$，$\psi\in D$，则（13.14.1）仍成立。

［证］ 令 $M=\operatorname{supp}\check{\psi}$，$\forall s\in \boldsymbol{R}^d$，令

$$g_s=\check{\psi}(s)\tau_s\check{\varphi}，\text{则 } g_s\in D，$$

映射 $s\mapsto g_s$ 是 $\boldsymbol{R}^d\mapsto D$ 的连续映射，且在 $M$ 外为 0，由定理 13.12，$\exists\rho\in D$，使得 $\forall\Lambda\in D'$，

$$\Lambda(\rho)=\int_{R^d}\Lambda(g_s)ds=\int_{R^d}\check{\psi}(s)\Lambda(\tau_s\check{\varphi})ds \qquad (13.14.2)$$

先取 $\Lambda=\delta_t$，则（13.14.2）成为

$$\forall t\in\boldsymbol{R}^d，\ \rho(t)=\int_{R^d}\check{\psi}(s)\ (\tau_s\check{\varphi})(t)ds$$
$$=(\varphi*\psi)^{\vee}(t)，$$

即 $\rho=(\varphi*\psi)^{\vee}$。

代入（13.14.2），$\forall\Lambda\in D'$，

$$\Lambda((\varphi*\psi)^{\vee})=\int_{R^d}\check{\psi}(s)\Lambda(\tau_s\check{\varphi})ds$$
$$=\int_{R^d}\check{\psi}(s)(\Lambda*\varphi)(s)ds=((\Lambda*\varphi)*\psi)(0)，$$

即 $$(\Lambda*(\varphi*\psi))(0)=((\Lambda*\check{\varphi})*\psi)(0)。$$

上式中的 $\psi$ 换成 $\tau_{-t}\psi$，再用定理 13.5 ①，得出，$\forall t\in\boldsymbol{R}^d$，

$$(\Lambda*(\varphi*\psi))(t)=((\Lambda*\varphi)*\psi)(t)，$$

即 $\Lambda*(\varphi*\psi)=(\Lambda*\varphi)*\psi$，

因 $\varphi*\psi=\psi*\varphi$，即证得 ①。

② 由引理 10.7① 推出，

$$\text{supp}\ (\Lambda*\psi)\subset\text{supp}\ \Lambda+\text{supp}\ \psi,$$

由定理 8.2 ⑨，对映射 $T:\psi\mapsto\Lambda*\psi$，$T$ 是 $D\mapsto C^\infty$ 连续线性映射（§13.6 ①），$T(D_K)\subset D_{K'}$，所以 $T$ 是 $D\mapsto D$ 连续的。

③ 由 ② 及引理 13.4②、定理 13.6②，以下三个映射：

$$\varphi\mapsto\Lambda*(\varphi*\psi)$$

$$\varphi\mapsto(\Lambda*\varphi)*\psi$$

$$\varphi\mapsto(\Lambda*\psi)*\varphi$$

都是 $C^\infty\to C^\infty$ 连续的，由 ①，它们在 $C^\infty$ 的稠子空间 $D$ 上相等，因而在 $C^\infty$ 上也相等。

§13.15 **引理** 设 $\Lambda\in D'$ 且有紧支集，$\Sigma\in D'$，$\varphi\in D$，则

$$\Lambda*(\Sigma*\varphi)=\Sigma*(\Lambda*\varphi)\in C^\infty。$$

［证］ 设 $\psi\in D$，则由定理 13.14③，

$$(\Lambda*(\Sigma*\varphi))*\psi=(\Lambda*\psi)*(\Sigma*\varphi)$$
$$=(\Sigma*\varphi)*(\Lambda*\psi),$$

由定理 13.14①、②

$$\text{上式}=\Sigma*(\varphi*(\Lambda*\psi))$$

由定理 13.14①，

$$\text{上式}=\Sigma*((\Lambda*\varphi)*\psi)=(\Sigma*(\Lambda*\varphi))*\psi,$$

所以 $(\Lambda*(\Sigma*\varphi))*\psi=(\Sigma*(\Lambda*\varphi))*\psi$

对所有的 $\psi$ 都成立，由定理 13.7② 的唯一性的论证，得

$$\Lambda*(\Sigma*\varphi)=\Sigma*(\Lambda*\varphi)。$$

§13.16 **定理** 设 $\Lambda,\Sigma\in D'$，且至少其中之一有紧支集，则存在唯一的 $\Theta\in D'$，使

$$\forall\varphi\in D,\Theta*\varphi=\Lambda*(\Sigma*\varphi)。$$

［证］ 由定理 13.14②、13.6 和 13.7②。

§13.17 **定义** 设 $\Lambda$、$\Sigma$ 如定理 13.16，其中的 $\Theta$ 定义为 $\Lambda$

$*\Sigma$，即 $\Lambda*\Sigma\in D'$，且 $\forall\varphi\in D$，

$$(\Lambda*\Sigma)*\varphi=\Lambda*(\Sigma*\varphi),$$

因而，$\forall\varphi\in D$，

$$(\Lambda*\Sigma)(\varphi)=((\Lambda*\Sigma)*\check{\varphi})(0)$$
$$=(\Lambda*(\Sigma*\check{\varphi}))(0)$$
$$=\Lambda(((\Sigma*\check{\varphi})^{\vee})。$$

§13.18 **定理** 设 $\Lambda,\Sigma$ 如定理13.16，则

① $\Lambda*\Sigma=\Sigma*\Lambda$。

② $\operatorname{supp}\Lambda*\Sigma\subset\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma$。

[证] ① 由引理13.15推出。

② 不失一般性，可假设 $\Sigma$ 有紧支集。设 $\varphi\in D$ 且 $(\Lambda*\Sigma)(\varphi)\neq0$，则由 ①，

$$\Lambda((\Sigma*\check{\varphi})^{\vee})\neq0。$$

由引理10.7 ①，$\operatorname{supp}\Lambda\cap\operatorname{supp}((\Sigma*\check{\varphi})^{\vee})\neq\phi$，

由定理13.14 ② 中的证明

$$\operatorname{supp}(\Sigma*\check{\varphi})^{\vee}=-\operatorname{supp}(\Sigma*\check{\varphi})$$
$$\subset-(\operatorname{supp}\Sigma+\operatorname{supp}\check{\varphi})$$
$$=-(\operatorname{supp}\Sigma-\operatorname{supp}\varphi)$$
$$=\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp}\Sigma,$$

故 $\operatorname{supp}\Lambda\cap(\operatorname{supp}\varphi-\operatorname{supp}\Sigma)\neq\phi$，

由此 $\operatorname{supp}\varphi\cap(\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma)\neq\phi$，

已证得：$\operatorname{supp}\varphi\cap(\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma)=\phi\Rightarrow(\Lambda*\Sigma)(\varphi)=0$，

即 $\operatorname{supp}\varphi\subset\boldsymbol{R}^d\setminus(\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma)\Rightarrow(\Lambda*\Sigma)(\varphi)=0$。

因 $\operatorname{supp}\Sigma$ 是紧集，$\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma$ 是闭集，$\boldsymbol{R}^d\setminus(\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma)$ 是开集，故

$$\boldsymbol{R}^d\setminus(\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma)\subset\Lambda*\Sigma\text{ 的零化集},$$

所以 $\operatorname{supp}\Lambda+\operatorname{supp}\Sigma\supset\operatorname{supp}\Lambda*\Sigma$。

§13.19 **定理** 如 $\Lambda,\Sigma,\Pi\in D'$，且其中至少两个有紧支

集，则

$$(\Lambda*\Sigma)*\Pi=\Lambda*(\Sigma*\Pi)。$$

［证］　同时考虑三种情况：(1) $\Lambda,\Pi$ 有紧支集，则 $\Lambda*\Pi$ 有紧支集，(2) $\Lambda,\Sigma$ 有紧支集，则 $\Lambda*\Sigma$ 有紧支集。(3) $\Sigma,\Pi$ 有紧支集，则 $\Sigma*\Pi$ 有紧支集。$\forall\varphi\in D$，

$$\begin{aligned}((\Lambda*\Sigma)*\Pi)*\varphi&=(\Lambda*\Sigma)*(\Pi*\varphi)\\&=\Lambda*(\Sigma*(\Pi*\varphi))\\&=\Lambda*((\Sigma*\Pi)*\varphi)\\&=(\Lambda*(\Sigma*\Pi))*\varphi。\end{aligned}$$

所以，$(\Lambda*\Sigma)*\Pi=\Lambda*(\Sigma*\Pi)$。

§13.20　**定理**　设 $\delta=\delta_0$，

① $\forall\varphi\in C^\infty,\delta*\varphi=\varphi$；

② $\forall\varphi\in C^\infty,\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d,(D^\alpha\delta)*\varphi=D^\alpha\varphi$；

③ $\forall\Lambda\in D',\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d,\Lambda*D^\alpha\delta=D^\alpha\Lambda$；

④ $\forall\Lambda\in D',\Lambda*\delta=\Lambda$；

⑤ 如 $\Lambda,\Sigma\in D'$，至少其中之一有紧支集，则 $\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，

$$D^\alpha(\Lambda*\Sigma)=(D^\alpha\Lambda)*\Sigma=\Lambda*(D^\alpha\Sigma)。$$

［证］　① $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$(\delta*\varphi)(x)=\delta(\tau_x\check{\varphi})=\varphi(x-0)=\varphi(x)。$$

② 由 ① 和定理 13.5②。

③ $\forall\varphi\in D$，由 ② 和定理 13.5 ②，

$$\begin{aligned}(\Lambda*D^\alpha\delta)*\varphi&=\Lambda*(D^\alpha\delta*\varphi)\\&=\Lambda*D^\alpha\varphi\\&=D^\alpha\Lambda*\varphi\end{aligned}$$

所以 $\Lambda*D^\alpha\delta=D^\alpha\Lambda$。

④ 由 ③ 推出。

⑤ 由 ③ 和定理 13.19，

$$D^\alpha(\Lambda*\Sigma)=(\Lambda*\Sigma)*D^\alpha\delta$$

$$= \Lambda * (\Sigma * D^{\alpha}\delta)$$

$$= \Lambda * D^{\alpha}\Sigma,$$

由定理 13.18 ①，

$$D^{\alpha}(\Lambda * \Sigma) = D^{\alpha}(\Sigma * \Lambda) = \Sigma * D^{\alpha}\Lambda = D^{\alpha}\Lambda * \Sigma。$$

§13.21 **例** 在 $\boldsymbol{R}^1$ 的情况，由下式定义 $H, I \in D'$：

$$H(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi \qquad \varphi \in D,$$

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \qquad \varphi \in D,$$

$$\forall \varphi \in D, H'(\varphi) = -\int_0^{\infty} \varphi' = \varphi(0),$$

$$I'(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi' = 0,$$

所以 $H' = \delta$，$I' = 0$。

由定理 13.20 ⑤ 和 ④，

$$I * (\delta' * H) = I * (\delta * H') = I * (\delta * \delta) = I。$$

而 $(I * \delta') * H = (I' * \delta) * H = (0 * \delta) * H = 0$。

所以 $I * (\delta' * H) \neq (I * \delta) * H$，

结合律不成立。

§13.22 **定理** 设 $h \in D, h \geqslant 0, \int_{R^d} h = 1$，$\forall j \in \mathcal{N}$，由下式定义 $h_j \in D$，

$$h_j(x) = j^d h(jx) \qquad x \in \boldsymbol{R}^d,$$

则 ① $\forall \varphi \in D(\Omega)$，$\varphi * h_j \to \varphi$ 在 $D(\Omega)$ 中，当 $j \to \infty$。

② $\forall \lambda \in D'$，$\Lambda_{\lambda * h_j} \to \lambda$，在 $D'$ 中。

③ 每一个 $\Lambda \in D'$ 是 $C^{\infty}$ 中函数序列在 $D'$ 中的极限。

④ 每一个 $\Lambda\in D'$ 是 $D$ 中函数序列在 $D'$ 中的极限。

〔证〕 ① $\forall\varphi\in D(\Omega)$，$\varphi$ 可延拓成 $D(R^d)$ 中函数，只要在 $\Omega$ 外令 $\varphi=0$，所以 $D(\Omega)\subset D(R^d)$，卷积 $\varphi*h_j$ 是有定义的。设 $\operatorname{supp}\varphi=K\subset\Omega$，$\forall\alpha\in N^d$，

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(D^\alpha\varphi*h_j)&\subset\operatorname{supp}(D^\alpha\varphi)+\operatorname{supp}h_j\\&\subset K+\frac{1}{j}\operatorname{supp}h\subset\text{紧集 }L,\end{aligned}$$

$\exists j_0$，当 $j\geqslant j_0$，可取 $L\subset\Omega$，且 $L$ 与 $j$ 无关。

$D^\alpha\varphi*h_j\to D^\alpha\varphi$，在 $L$ 上一致成立，当 $j\to\infty$，

因 $\quad D^\alpha(\varphi*h_j)=D^\alpha\varphi*h_j$，

所以 $\varphi*h_j\to\varphi$，在 $D(\Omega)$ 中，当 $j\to\infty$。

② 设 $\varphi\in D$，由定理 13.4① 和本定理的 ①，

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda*h_j}(\varphi)&=((\lambda*h_j)*\check{\varphi})(0)\\&=(\lambda*(h_j*\check{\varphi}))(0)\\&=\lambda((h_j*\check{\varphi})^{\vee})\to\lambda(\varphi),\text{当 } j\to\infty,\end{aligned}$$

所以在 $D'$ 中 $\Lambda_{\lambda*h_j}\to\lambda$，当 $j\to\infty$。

③ 由 ② 推出，因 $\lambda*h_j\in C^\infty$。

④ $\forall\Lambda\in D'$，由 ③，$\exists$ 序列 $\{f_n\}\subset C^\infty$，使 $\forall\varphi\in D$，$\int_{R^d}f_n\,\varphi\,dx\to\Lambda(\varphi)$，当 $n\to\infty$。

因按 $C^\infty$ 的拓扑，$D$ 在 $C^\infty$ 中稠，$\exists\,\psi_n\in D$，使

$$\sup_{\|x\|<n}|f_n(x)-\psi_n(x)|<1/n^{d+1},$$

现证明：$\forall\varphi\in D$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^d}\psi_n\varphi dx\to\Lambda(\varphi)$。

令 $\operatorname{supp}\varphi=K$，$\sup\limits_{x\in R^d}|\varphi(x)|=\|\varphi\|$，当 $n$ 充分大，$K\subset\bar{B}(0,n)$。$\forall\varepsilon>0$，当 $n$ 充分大，

$$\left|\int_{R^d}f_n\,\varphi\,dx-\Lambda(\varphi)\right|<\varepsilon/2。$$

$$\left|\int_{R^d} f_n \varphi\, dx - \int_{R^d} \psi_n \varphi\, dx\right|$$

$$\leqslant \int_{\|x\|<n} |f_n(x) - \psi_n(x)||\varphi(x)|\,dx$$

$$\leqslant n^{-(d+1)}\|\varphi\|\mu(\bar{B}(0,n)) < \varepsilon/2,$$当 $n$ 充分大。

所以 当 $n$ 充分大，$\left|\int_{R^d} \psi_n \varphi dx - \Lambda(\varphi)\right| < \varepsilon$。

即 $\Lambda_{\psi_n} \to \Lambda$，在 $D'$ 中，当 $n \to \infty$。

# 第三章　Fourier 变换

## 第十四节　Fourier 变换与速降函数空间 S

§14.1　**定义**　① 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上定义测度

$$m=(\sqrt{2\pi})^{-d}\times \text{Lebesque 测度。}$$

② 如 $f,g\in L^1(m)$，定义

$$(f*g)(x)=\int_{R^d} f(x-y)g(y)dm(y)。$$

注意这里定义的 $f*g$ 与第十三节中定义的相差一个常数因子 $(\sqrt{2\pi})^{-d}$。

③ 如 $t\in\boldsymbol{R}^d$，由下式定义 $e_t\in C^\infty(R^d)$：

$e_t(x)=\exp(it\cdot x),x\in\boldsymbol{R}^d$，

$t\cdot x=t_1x_1+\cdots+t_dx_d$。

④ 如 $f\in L^1(m)$，由下式定义 $\hat{f}:\boldsymbol{R}^d\mapsto\boldsymbol{C}$，

$$\hat{f}(t)=\int_{R^d} fe_{-t}dm,\ t\in\boldsymbol{R}^d,$$

$\hat{f}$ 称为 $f$ 的 Fourier 变换象，简称 **Fourier 变换**。映射 $\wedge$：$f\mapsto\hat{f}$ 也称为 Fourier 变换，它是定义在 $L^1(m)$ 上的映射。

§14.2　**引理**　① 如 $\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，则

$$D^\alpha e_t=(it)^\alpha e_t,$$

这里　　$(it)^\alpha=(it_1)^{\alpha_1}\cdots(it_d)^{\alpha_d}$。

② 如 $P$ 是多项式，则 $P(D)e_t=P(it)e_t$。

这里　　$P(x)=\sum_{|\alpha|\leq N}\lambda_\alpha x^\alpha$

$$= \sum_{|\alpha|<N} \lambda_{\alpha_1,\cdots,\alpha_d} x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d},$$

$$P(D) = \sum_{|\alpha|<N} \lambda_\alpha D^\alpha = \sum_{|\alpha|<N} \lambda_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}\cdots(\partial x_d)^{\alpha_d}}。$$

③ 如 $f\in L^1(\boldsymbol{R}^d)$（以后简记成 $L^1$ 或 $L^1(m)$），$x\in\boldsymbol{R}^d$，则 $(\tau_x f)^\wedge = e_{-x}\hat{f}$。

④ 如 $f\in L^1$，$x\in\boldsymbol{R}^d$，则 $(e_x f)^\wedge = \tau_x\hat{f}$。

⑤ 如 $f,g\in L^1$，则 $(f*g)^\wedge = \hat{f}\cdot\hat{g}$。

⑥ 如 $f,g\in L^1$，则 $\int\hat{f}\,gdm = \int f\hat{g}dm$。

积分号下不标出积分区域的均表示在 $\boldsymbol{R}^d$ 上的积分。

⑦ 如 $f\in L^1,\lambda>0$，且 $h(x)=f(x/\lambda),x\in\boldsymbol{R}^d$，则

$$\forall t\in\boldsymbol{R}^d,\hat{h}(t)=\lambda^d\hat{f}(\lambda t)。$$

⑧ 如 $f\in D$，则 $(D^\alpha f)^\wedge(t)=(it^\alpha)\hat{f}(t)$。

⑨ 如 $f\in D$，且 $P$ 是多项式，则

$$(P(-iD)f)^\wedge = P\hat{f}。$$

［证］①—④ 和 ⑦由变量替换证得。⑤、⑥ 由Fubini 定理推出。

$$\begin{aligned}
⑧\ (D^\alpha f)^\wedge(t) &= (D^\alpha f * e_t)(0)\\
&= (f * D^\alpha e_t)(0)\\
&= (f * (it)^\alpha e_t)(0)\\
&= (it)^\alpha (f * e_t)(0)\\
&= (it)^\alpha \hat{f}(t)。
\end{aligned}$$

⑨ 由⑧推出。

§ 14.3 **定理（Riemann-Lebesque 引理）** 设 $f\in L^1$，则：

① $\hat{f}$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上连续。

② $\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{t\in\boldsymbol{R}^d}|\hat{f}(t)| \leqslant \|f\|_1 = \int|f(t)|dm(t)$。

③ $\hat{f}(t)\to 0$ 当 $\|t\|\to\infty$。

**注** 如 $C_0$ 表示在 $\infty$ 处趋于 0 的 $\boldsymbol{R}^d$ 上连续复值函数全体组成的线性空间，则 Fourier 变换 $\wedge$ 是 $L^1\to C_0$ 的连续线性算子，且映射下范数不增加，算子范数 $\leqslant 1$。

［证］ ①如 $t_n\to t$，则 $fe_{-t_n}\to fe_{-t}$，在 $\boldsymbol{R}^d$ 上点点收敛，由 Lebesque 控制收敛定理，

$$\hat{f}(t_n)\to\hat{f}(t)。$$

② $\forall t\in\boldsymbol{R}^d$，$|\hat{f}(t)|=\left|\int fe_{-t}\,dm\right|\leqslant\int|f|dm=\|f\|_1$。

③ 先设 $f\in D$，令 $P(t)=1+\|t\|^2=1+t_1^2+\cdots+t_d^2$，则由引理 14.2 和 14.3 ②，

$$\forall t\in\boldsymbol{R}^d,\ |P(t)\hat{f}(t)|\leqslant\|P\hat{f}\|_\infty=\|(P(-iD)f)^\wedge\|_\infty$$
$$\leqslant\|P(-iD)f\|_1。$$

所以，$|\hat{f}(t)|\leqslant\dfrac{\|P(-iD)f\|_1}{P(t)}\to 0$，当 $\|t\|\to\infty$，

因此，$\hat{f}\in C_0$，因 $D$ 在 $L^1$ 稠，$C_0$ 在 $C(R^d)$ 中闭，由②推出要证的结论。

**附注：引理**(i) 如 $C_C(\Omega)$ 表示 $\Omega$ 中有紧支集的连续函数空间；$1\leqslant p<\infty$，则 $C_C(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密。

［证］ 取 $\Omega$ 的紧子集序列 $\{K_n\}$ 使 $\Omega=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$，且 $K_n\subset\mathring{K}_{n+1}$。设 $u\in L^p(\Omega)$，令

$$u_n(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当 } x\in K_n，\text{且 } |u(x)|\leqslant n,\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

则因 $u(x)$ 几乎处处有限，当 $n\to\infty$，$u_n(x)\to u(x)$，a.e.；$|u_n(x)-u(x)|^p\to 0$，a.e.，且 $|u_n(x)-u(x)|^p\leqslant|u(x)|^p$，由控制收敛定理，当 $n\to\infty$，$\int_\Omega|u_n(x)-u(x)|^p dx\to 0$。故 $\forall\varepsilon>0$，当 $n$ 充分大，$\|u_n-u\|_p<\varepsilon/2$。

而 supp $u_n\subset K_n$，且 $|u_n|\leqslant n$。

取定 $u_n$，由 Lusin 定理，$\forall \eta>0, \exists g \in C_0(\Omega)$，使

$\mu(\{x \in \Omega : g(x) \neq u_n(x)\}) < \eta$，

且 $$|g| \leqslant |u_n| \leqslant n,$$

所以 $$\int_\Omega |g(x) - u_n(x)|^p dx \leqslant (2n)^p \eta,$$

$$\|g - u_n\|_p \leqslant 2n\eta^{1/p} < \varepsilon/2,$$

只要取 $$\eta < (\varepsilon/4n)^p。$$

所以 $$\|u - g\|_p < \varepsilon,$$

$C_c(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密。

**引理**(ii)　当 $1 \leqslant p < \infty$，$D(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠。

［证］　用 § 9.3 例 ①中的引理(i)，并用其中的记号，设 $u \in L^p(\Omega)$。

$\forall \eta > 0$，由前面的引理 (i)，$\exists g \in C_c(\Omega)$，使得 $\|u - g\|_p < \eta/2$。

由(9.3.1)式，$J_\varepsilon * g \to g$ 在 $\Omega$ 上一致，当 $\varepsilon \to 0$（这里的卷积按第九节中定义）。所以，$\forall \delta > 0$，当 $\varepsilon$ 充分小，$|J_\varepsilon * g - g| < \delta$ 在 $\Omega$ 上一致成立，

由于 $K = \operatorname{supp} g$ 是 $\Omega$ 的紧子集，可取 $\varepsilon$ 充分小，使得 $\operatorname{supp} J_\varepsilon * g \subset \operatorname{supp} g + \bar{B}(0, \varepsilon) \subset$ 紧集 $K' \subset \Omega$，

$$\int_\Omega |J_\varepsilon * g - g|^p dx = \int_{K'} |J_\varepsilon * g - g|^p dx$$
$$\leqslant \delta^p \mu(K') < (\eta/2)^p,$$

只要取 $$\delta < (\mu(K'))^{-1/p} \cdot \eta/2。$$

所以 $$\|J_\varepsilon * g - g\|_p < \eta/2。$$

因此，当 $\varepsilon$ 充分小时，

$$\|J_\varepsilon * g - u\|_p \leqslant \|J_\varepsilon * g - g\|_p + \|g - u\|_p < \eta,$$

而 $J_\varepsilon * g \in D(\Omega)$，所以 $D(\Omega)$ 在 $L_p(\Omega)$ 中稠。

从以上的证明还可看出，如果 $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$，可以取同一序列 $\{g_n\} \subset D(\Omega)$，使 $\|g_n - u\|_p \to 0$，$\|g_n - u\|_q \to 0$。这点

本节后面要用到。

§14.4 **定理** 设 $j\in\{1,\cdots,d\}$ 且 $f\in L^1$，

①设 $\int|x_j||f(x)|dm(x)<\infty$，则 $\partial\hat{f}/\partial t_j$ 存在且等于 $\hat{g}$，这里 $g(x)=-ix_jf(x)$。

② 设对所有满足 $|\alpha|\leqslant N$ 的 $\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，

$$\int|x^\alpha||f(x)|dm(x)<\infty,$$

则当 $|\alpha|\leqslant N$，$D^\alpha\hat{f}$ 存在且等于 $\hat{g}$，这里 $g(x)=(-ix)^\alpha f(x)$。

［**证**］ ① 设 $t\in\boldsymbol{R}^d$，且实数 $h\neq 0$，则 $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$\left|\frac{f(x)e_{-(t+he_j)}(x)-f(x)e_{-t}(x)}{h}\right|$$

$$\leqslant|f(x)|\left|\frac{2\sin(hx_j/2)}{h}\right|\leqslant|x_j||f(x)|。$$

由控制收敛定理，当 $h\to 0$，

$$\frac{\hat{f}(t+he_j)-\hat{f}(t)}{h}$$

$$=\frac{\int f(x)e^{-i(t+he_j)\cdot x}dm(x)-\int f(x)e^{-it\cdot x}dm(x)}{h}$$

$$\to\int f(x)\frac{\partial}{\partial t_j}e_{-t}(x)dm(x)=\int -ix_jf(x)e_{-t}(x)dm(x),$$

① 得证。

② 由①再用数学归纳法证得。

§14.5 **定义** 设：

$S=\{f\in C^\infty:\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d,\forall\beta\in\boldsymbol{N}^d,\sup\limits_{x\in R^d}|x^\alpha D^\beta f(x)|=M(\alpha,\beta)<\infty\}=\{f\in C^\infty$：对所有的多项式 $P,Q$，$P\cdot Q(D)f$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 有界$\}$，

$S$ 称为在无穷远处急速下降的无穷可微函数空间，简称速降函数空间。

§ 14.6 **定理** 设 $f\in S$，$P$ 是多项式，则

① $f\in L^1$（即 $S\subset L^1$）。

② $P(-iD)f\in S$，且 $(P(-iD)f)^\wedge = P\hat{f}$。

③ $Pf\in S$，且 $(Pf)^\wedge = P(iD)\hat{f}$。

④ $\hat{f}\in S$。

［证］ ① $\exists$ 常数 $M>0$，使 $\forall x\in \boldsymbol{R}^d$，

$$|(1+x_1^2)\cdots(1+x_d^2)f(x)|\leqslant M,$$

所以 $f\in L^1$。

② 由 $S$ 的定义，$P(-iD)f\in S$，令 $j\in\{1,\cdots,d\}$，用分部积分公式，$\forall t\in \boldsymbol{R}^d$，

$$\int\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)e^{-it\cdot x}dm(x)=it_j\int f(x)e^{-it\cdot x}dm(x),$$

即 $(D_jf)^\wedge(t)=it_j\hat{f}(t)$，

所以 $(-iD_jf)^\wedge=t_j\hat{f}(t)$，

用数学归纳法和 Fourier 变换的线性性质，证得②。

③ 因 $f\in S$，$\forall j\in\{1,\cdots,d\}$，$\exists$ 正数 $M$ 使得

$$|(1+x_1^2)\cdots(1+x_d^2)(1+\|x\|^2)f(x)|\leqslant M,$$

故
$$|x_j||f(x)|\leqslant M\frac{\|x\|}{1+\|x\|^2}\cdot\frac{1}{1+x_1^2}\cdots\frac{1}{1+x_d^2},$$

由定理 14.4，得出 $\hat{f}\in C^1$，且

$iD_j\hat{f}=\hat{g}$（这里 $g(x)=x_jf(x)$），

因 $g\in S$，用数学归纳法和 Fourier 变换的线性性质推出③。

④ $\forall t\in \boldsymbol{R}^d$，记 $R(t)=Q(-it)$，则 $R(t)$ 是 $t$ 的多项式，由②、③，

$$P\cdot Q(D)\hat{f}=P\cdot R(-iD)\hat{f}=P\cdot(Rf)^\wedge=(P(-iD)Rf)^\wedge,$$

这里，由定理 14.3②，

$$\|P\cdot Q(D)\hat{f}\|_\infty=\|(P(-iD)Rf)^\wedge\|_\infty\leqslant\|P(-iD)Rf\|_1<\infty,$$
所以 $\hat{f}\in S$。

§ 14.7 **引理** 设 $\varphi(x)=\exp(-\|x\|^2/2)$，$x\in\boldsymbol{R}^d$，则 $\varphi\in S$，且 $\hat{\varphi}=\varphi$。

［证］ $\forall t\in\boldsymbol{R}$，
$$\int_{-\infty}^{\infty}(x+it)e^{-(x+it)^2/2}dx=\left[-e^{-(x+it)^2/2}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}=0,$$
上式乘以 $e^{-t^2/2}$
$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2}e^{-itx}dx+it\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}e^{-itx}dx=0。$$
在 $d=1$ 的情况，$\varphi(x)=e^{-x^2/2}$，由定理 14.6③，得
$$i\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(t)+it\hat{\varphi}(t)=0,$$
即
$$\frac{d}{dt}\hat{\varphi}(t)+t\hat{\varphi}(t)=0,$$
$$\hat{\varphi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx=1,$$
由上述常微分方程初值问题解的存在唯一性定理，知 $\hat{\varphi}(t)=e^{-t^2/2}$。

这证明了 $d=1$ 的情况。$d>1$ 的情况易由此推出。

§ 14.8 **引理** 如 $f,g\in S$，则
$$g(0)\int\hat{f}dm=f(0)\int\hat{g}dm。$$
［证］ 令 $h(x)=f(x/\lambda)$，$\lambda>0$，用引理 14.2⑥，
$$\int g\hat{h}dm=\int\hat{g}hdm,$$
用引理 14.2⑦，
$$\int g(x)\lambda^d\hat{f}(\lambda x)dm(x)=\int\hat{g}(x)f(x/\lambda)dm(x),$$

由此 $\int g(x/\lambda)\hat{f}(x)dm(x)=\int \hat{g}(x)f(x/\lambda)dm(x)$，

令 $\lambda\to\infty$，用控制收敛定理，

$$\int g(0)\hat{f}(x)dm(x)=\int \hat{g}(x)f(0)dm(x)。$$

§ 14.9 **定理(反演公式)**，如 $f\in S$，则 $\forall x\in \mathbf{R}^k$，

$$f(x)=\int \hat{f}e_x dm=\int \hat{f}(t)e^{ix\cdot t}dm(t)。$$

［证］ 取 $g(x)=e^{-\|x\|^2/2}$，则

$$\int \hat{g}\ dm=\int g dm=1=g(0)，$$

用引理 14.8，$f(0)=\int \hat{f}dm$，

把 $f$ 换成 $\tau_{-x}f$，

$$f(x)=(\tau_{-x}f)(0)=\int(\tau_{-x}f)^{\wedge}dm，$$

由引理 14.2③，

$$f(x)=\int e_x\hat{f}dm。$$

§ 14.10 **引理** ① 对所有的 $f\in L^1$，$f^{\wedge\vee}=f^{\vee\wedge}$。

② 对所有的 $f,g\in L^1$，$(f*g)^{\vee}=\check{f}*\check{g}$。

§ 14.11 **定理** ① 对所有的 $f\in S$，

$$f=f^{\wedge\vee\wedge}=f^{\vee\wedge\wedge}=f^{\wedge\wedge\wedge\wedge}。$$

② Fourier 变换 $\wedge$ 是 $S$ 到 $S$ 上的线性的、一一的、映满的映射。

③ 如 $f\in L^1$，且 $\hat{f}\in L^1$，则

$$(\text{a.e.})\,f=f^{\wedge\vee\wedge}=f^{\wedge\wedge\vee}=f^{\vee\wedge\wedge}。$$

④ 如 $f\in S,g\in S$，则 $f*g\in S$。

⑤ 如 $f\in S,g\in S$，则 $(fg)^{\wedge}=\hat{f}*\hat{g}$。

⑥ Parseval 公式：如 $f\in S,g\in S$，则按 $L^2(m)$ 的内积 $(,)$，$(f,g)=(\hat{f},\hat{g})$。

⑦ Plancherel 定理　Fourier 变换 ∧ 可延拓成 $L^2$ 到 $L^2$ 上的等距线性同构映射，在 $L^2$ 上 Parseval 公式仍成立。

［证］ ① 由定理 14.9，$\forall x \in \boldsymbol{R}^d$，

$$f(x)=\int \hat{f} e_x dm=\int (\hat{f})^{\vee} \check{e}_x dm=\int (\hat{f})^{\vee\vee} e_{-x} dm=f^{\wedge\vee\wedge}(x)\text{。}$$

所以 $f=f^{\wedge\vee\wedge}$。第二、第三等式由引理 14.10① 推出。第四等式由已证得的等式推出，即

$$f=f^{\wedge\wedge\vee}=f^{\wedge\wedge\vee\vee\vee\wedge\wedge}=f^{\wedge\vee\wedge}\text{。}$$

② 由 ① 推出。

③ 设 $g\in D\subset S$，则由引理 14.11 ① 和引理 14.2⑥，

$$\begin{aligned}\int fg\, dm&=\int f\, g^{\wedge\vee\wedge} dm\\&=\int \hat{f} g^{\wedge\vee} dm\\&=\int (\hat{f})^{\vee} \hat{g}\, dm\\&=\int f^{\wedge\vee\wedge} g\, dm\text{。}\end{aligned}$$

因上式对所有的 $g\in D$ 成立，

所以　　　　$f=f^{\wedge\vee\wedge}$，a.e.

另外两等式由引理 14.10 ①。

④ 因 $f,g\in L^1, f*g\in L^1, \hat{f},\hat{g}\in S\subset L^1$，故由引理 14.2⑤，

$$(f*g)^{\wedge}=\hat{f}\hat{g}\in S\subset L^1,$$

由 ③，对 a.e.$t\in \boldsymbol{R}^d$，

$$(f*g)(t)=(f*g)^{\wedge\vee\wedge}(t)=(\hat{f}\hat{g})^{\vee\wedge}(t)\text{。}$$

现$(\hat{f}\hat{g})^{\vee\wedge}\in S$，且因 $f,g\in S$，由直接计算，可验证 $f*g$ 连续，因而

$$f*g=(\hat{f}\hat{g})^{\vee\wedge}\in S \qquad (14.11.1)$$

⑤ 由(14.11.1)，

$$\hat{f}*\hat{g}=(f^{\wedge\wedge}g^{\wedge\wedge})^{\vee\wedge}=(f^{\wedge\wedge\vee}\ g^{\wedge\wedge\vee})^{\wedge}=(fg)^{\wedge}\text{。(由①)}$$

⑥ 由反演公式，

$$
\begin{aligned}
(f,g) &= \int f\bar{g}dm \\
&= \int\left[\int \hat{f}(y)e^{ix\cdot y}\,dm(y)\right]\bar{g}(x)dm(x) \\
&= \int \hat{f}(y)\left[\int \bar{g}(x)e^{iy\cdot x}dm(x)\right]dm(y) \\
&= \int \hat{f}(y)\left[\overline{\int g(x)e^{-iy\cdot x}dm(x)}\right]dm(y) \\
&= \int \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}\;dm(y) \\
&= (\hat{f},\hat{g})。
\end{aligned}
$$

⑦ 由⑥，$\forall f\in S$，

$$\|\hat{f}\|_2^2=(\hat{f},\hat{f})=(f,f)=\|f\|_2^2。$$

因 $D$ 在 $L^2$ 中稠，故 $S$ 在 $L^2$ 中稠，以下证明由②可推出⑦。

$\forall f\in L^2$，$\exists$ 序列 $\{f_n\}\subset S$，使 $\|f_n-f\|_2\to 0$，因而 $\|\hat{f}_n-\hat{f}_m\|_2=\|f_n-f_m\|_2\to 0$，当 $n$, $m\to\infty$。所以 $\{\hat{f}_n\}$ 是 $L^2$ 中的 Cauchy序列，因此 $\exists\ \tilde{f}\in L^2$，使在 $L^2$ 中，$\hat{f}_n\to\tilde{f}$，当 $n\to\infty$。定义 $\hat{f}=\tilde{f}$，易证明此极限 $\tilde{f}$ 与 $\{f_n\}$ 的选取无关，由 $f\in L^2$ 唯一确定。其余部分易验证。

**附注** (i) 如 $f\in L^2\cap L^1$，要证明由延拓方法得出的 $\tilde{f}(t)=\int f(x)e^{-ix\cdot t}dm(x)=\hat{f}(t)$，a.e.。

由定理 14.3 后面的附注可取同一序列 $\{\varphi_n\}\subset D\subset S$，使 $\|\varphi_n-f\|_1\to 0$，$\|\varphi_n-f\|_2\to 0$。$\|\hat{\varphi}_n-\hat{f}\|_\infty\leqslant\|\varphi_n-f\|_1\to 0$，

所以 $\hat{\varphi}_n(t)\to\hat{f}(t)$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上一致。

而由 $\|\hat{\varphi}_n-\tilde{f}\|_2\to 0$，存在子序列 $\{\hat{\varphi}_{n_k}\}$，

$\hat{\varphi}_{n_k}(t)\to\tilde{f}(t)$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上 a.e.，

所以 (a.e.) $\tilde{f}(t)=\hat{f}(t)=\int f(x)e^{-ix\cdot t}dm(x)$。

附注(ii) $L^2$ 上的 Fourier 变换也可用 $L^1$ 的 Fourier 变换在 $L^2$ 取极限而得出。即 $\forall f\in L^2$，如任一序列 $\{f_n\}\subset L^1\cap L^2$，使 $\|f_n-f\|_2\to 0$，则 $\|\hat{f}_n-\tilde{f}\|_2\to 0$。

〔证〕 取 $\{\varphi_n\}\subset S$，使 $\|\varphi_n-f\|_2\to 0$，则 $\|\hat{\varphi}_n-\tilde{f}\|_2\to 0$，因而

$$
\begin{aligned}
\|\hat{f}_n-\tilde{f}\|_2 &\leqslant \|\hat{f}_n-\hat{\varphi}_n\|_2+\|\hat{\varphi}_n-\tilde{f}\|_2\\
&=\|f_n-\varphi_n\|_2+\|\hat{\varphi}_n-\tilde{f}\|_2\\
&\leqslant \|f_n-f\|_2+\|f-\varphi_n\|_2+\|\hat{\varphi}_n-\tilde{f}\|_2\to 0
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty$。

附注(iii) $\forall f\in L^2$，令

$$
f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当 } \|x\|\leqslant n\\ 0 & \text{当 } \|x\|>n\end{cases}
$$

则 $\{f_n\}\subset L^1\cap L^2$，$\|f_n-f\|_2\to 0$，由(ii)，$\|\hat{f}_n-\tilde{f}\|_2\to 0$，所以

$$
\tilde{f}(t)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{\|x\|\leqslant n} f(x)e^{-ix\cdot t}dm(x),
$$

l.i.m. 表示 $L^2$ 中的极限。

## 第十五节　索波列夫引理

**§15.1　引理**　设 $r$ 是自然数，$\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中的非空开子集，$f\in L^2(\Omega)$，且有紧支集 $K\subset\Omega$，$j\in\{1,\cdots,d\}$，设对所有满足 $1\leqslant s\leqslant r$ 的自然数 $s$，$D_j^s f$ 是在 $\Omega$ 上局部 $L^2$"，即存在 $\Omega$ 上局部 $L_2$ 函数 $g_s$，使 $\forall\varphi\in D(\Omega)$，

$$
\int_\Omega g_s\varphi=(-1)^s\int_\Omega fD_j^s\varphi \tag{15.1.1}
$$

(约定 $g_0=f$，则(15.1.1)对 $s=0$ 仍成立)。

定义 $F=\begin{cases} f & 在\,\Omega\,上 \\ 0 & 在\,\Omega\,外 \end{cases}$ (15.1.2)

则有 $\int |\hat{F}(t)|^2 dm(t)<\infty$,

$$\int |\hat{F}(t)|^2 |t_j|^{2r} dm(t)<\infty。$$

[证] 取 $\psi\in D(\Omega)$,使在 $\operatorname{supp} f=K$ 上 $\psi=1$,则 $f=f\psi$,$F|_\Omega=f\psi$,令

$$G=\begin{cases} \sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}g_s D_j^{r-s}\psi & 在\,\Omega\,上, \\ 0 & 在\,\Omega\,外, \end{cases}$$

则 $G$ 在 $\Omega$ 上局部 $L^2$,且有紧支集,故

$$G\in L^2(R^d)\cap L^1(R^d) \tag{15.1.3}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}(t)&=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\int_\Omega e_{-t}g_s D_j^{r-s}\psi\ dm \\
&=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\int_\Omega g_s(e_{-t}D_j^{r-s}\psi)dm \\
&=\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}(-1)^s\int_\Omega fD_j^s(e_{-t}D_j^{r-s}\psi)dm \quad (由(15.1.1)) \\
&=\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{s}\binom{r}{s}(-1)^s\binom{s}{k}\int_\Omega f(D_j^k e_{-t})(D_j^{s-k}D_j^{r-s}\psi)dm \\
&=\sum_{s=0}^{r}\sum_{k=0}^{s}\binom{r}{s}\binom{s}{k}(-1)^s\int_\Omega f\cdot(-it_j)^k e_{-t}(D_j^{r-k}\psi)dm \\
&=\sum_{k=0}^{r}\sum_{s=k}^{r}\binom{r}{k}\binom{r-k}{s-k}(-1)^{s-k}(it_j)^k\int_\Omega fe_{-t}(D_j^{r-k}\psi)dm \\
&=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(it_j)^k\int_\Omega fe_{-t}D_j^{r-k}\psi dm\sum_{s=k}^{r}\binom{r-k}{s-k}(-1)^{s-k},
\end{aligned}$$

最后的和式 $\sum_{s=k}^{r}\binom{r-k}{s-k}(-1)^{s-k}=(1-1)^{r-k}=\delta_{kr}=\begin{cases}0 & 当\ k\neq r, \\ 1 & 当\ k=r,\end{cases}$

故 $\hat{G}(t)=(it_j)^r\int_\Omega fe_{-t}\psi dm=(it_j)^r\hat{F}(t)$。

由(15.1.2)、(15.1.3)，$F\in L^2\cap L^1$，$G\in L^2\cap L^1$，由 Plancherel 定理，$\hat{F}\in L^2$，$\hat{G}\in L^2$，证得所求的结论。

§15.2 **引理** 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的非空开子集，$f\in L^2(\Omega)$，且有紧支集 $K\subset\Omega$，且 $\forall j\in\{1,\cdots,d\}$，对所有满足 $1\leqslant s\leqslant r$ 的整数 $s$，$D_j^s\Lambda_f$ 在 $\Omega$ 上局部 $L^2$，如 $p$ 是满足 $0\leqslant p<r-d/2$ 的整数，则有 $\boldsymbol{R}^d$ 上 $C^p$ 函数 $F_0$，使 $F_0=F$ a.e.，其中 $F$ 由(15.1.1)式定义。

［证］ 由引理 15.1，

$$\int|\hat{F}(t)|^2(1+|t_1|^{2r}+\cdots+|t_d|^{2r})dm(t)<\infty, \qquad (15.2.1)$$

由Cauchy-Schwarz 不等式和 Hölder 不等式，

$$\begin{aligned}(1+\|t\|)^2&\leqslant 2\left(1+\sum_{j=1}^{d}|t_j|^2\right)\\ &\leqslant 2(1+\cdots+1)^{1-1/r}\left(1+\sum_{j=1}^{d}|t_j|^{2r}\right)^{1/r}\\ &=2(d+1)^{1-1/r}\left(1+\sum_{j=1}^{d}|t_j|^{2r}\right)^{1/r},\end{aligned}$$

所以 $(1+\|t\|)^{2r}\leqslant 2^r(d+1)^{r-1}\left(1+\sum_{j=1}^{d}|t_j|^{2r}\right)$。

由(15.2.1)，

$$\int|\hat{F}(t)|^2(1+\|t\|)^{2r}dm(t)<\infty \qquad (15.2.2)$$

设 $\sigma$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中单位球面面积，即 $\sigma=2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$，则

$$\int(1+\|t\|)^{2p-2r}dm(t)=\frac{\sigma}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_0^\infty(1+\rho)^{2p-2r}\rho^{d-1}d\rho$$

$$\leqslant\frac{\sigma}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_0^\infty(1+\rho)^{2p-2r+d-1}d\rho<\infty \qquad (15.2.3)$$

因 $2p-2r+d<0$。

用关于积分的 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\int|\hat{F}(t)|(1+\|t\|)^p\,dm(t)$$

$$\leqslant\left[\int|\hat{F}(t)|^2(1+\|t\|)^{2r}dm(t)\right]^{1/2}\left[\int(1+\|t\|)^{2p-2r}dm(t)\right]^{1/2}$$

$<\infty$，（由（15.2.2）和（15.2.3））

由此 $\hat{F}\in L^1$，且对所有满足 $|\alpha|\leqslant p$ 的 $\alpha$，

$$\int|t^\alpha||\hat{F}(t)|dm(t)<\infty,$$

$$\int|t^\alpha||\hat{F}(t)|^\vee dm(t)<\infty,$$

由定理 14.4②，$F^{\wedge\vee\vee\wedge}\in C^p(R^d)$，因 $F\in L^2$ 且 $F$ 有紧支集，所以 $F\in L^1$，由 $\hat{F}\in L^1$，用定理 14.11③，$F=F^{\wedge\vee\vee\wedge}$，a.e.，引理得证。

§15.3 **注意** 引理 15.2 的假设中，不包含 $\Lambda_f$ 的任一混合导数。

§15.4 **定理（索波列夫引理）** 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的非空开子集，$f$ 在 $\Omega$ 上局部 $L^2$，且对所有的 $j\in\{1,\cdots,d\}$，对所有满足 $1\leqslant s\leqslant r$ 的整数 $s$，$D_j^s\Lambda_f$ 在 $\Omega$ 上局部 $L^2$，如 $p$ 是满足 $0\leqslant p<r-d/2$ 的整数，则存在 $\Omega$ 上 $C^p$ 函数 $f_0$，使得在 $\Omega$ 上 $f_0=f$ a.e.。

［证］ 设 $\{K_i\}$ 是 $\Omega$ 的紧子集序列满足

$$\phi\neq\operatorname{int}K_1\subset K_1\subset\operatorname{int}K_2\subset K_2\subset\cdots,$$

且 $\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$。

取 $\psi_n\in D(\Omega)$，使在 $K_n$ 上 $\psi_n=1$，则 $f\psi_n\in L^2(\Omega)$ 且有紧支集包含于 $\Omega$ 内，令 $\Lambda_{f\psi_n}=\psi_n\Lambda_f$，由定理 9.9（Leibniz 公式），对所有的 $j$ 和 $s\leqslant r$，

$$D_j^s\Lambda_{f\psi_n}\text{ 在 }\Omega\text{ 上局部 }L^2,$$

由引理 15.2，存在 $\boldsymbol{R}^d$ 上 $C^p$ 函数 $F_n$ 满足

$$F_n=f\psi_n\quad\text{在 }\Omega\text{ 上 a.e.},$$

因而有 $$F_n=f\quad\text{在 }K_n\text{ 上 a.e.}。$$

如 $m<n$，则 $F_m=f=F_n$ 在 $\operatorname{int}K_m$ 上 a.e.。

因 $F_m, F_n$ 是连续的，所以在 int $K_m$ 上，$F_m = F_n$。所以存在 $\Omega$ 上函数 $f_0$ 满足

$$\forall n \in \mathcal{N}, f_0|_{\operatorname{int} K_n} = F_n|_{\operatorname{int} K_n},$$

所以 $f_0 \in C^p(\Omega)$。在 $\Omega$ 上 a.e.，$f_0 = f$。

§ 15.5 **系** 如对所有的 $j \in \{1, \cdots, d\}$，对所有的非负整数 $s$，$D_j^s A_j$ 在 $\Omega$ 上局部 $L^2$，则存在 $f_0 \in C^\infty(\Omega)$，使得在 $\Omega$ 上，几乎处处 $f_0 = f$。

## 第十六节 速降函数空间 $S$ 上的拓扑

§ 16.1 **定义** 对所有非负整数 $N$，由下式定义 $S$ 上半范 $q_N$：

$$q_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N, |\beta| \leq N} \sup_{x \in \boldsymbol{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)|, \quad f \in S。$$

记 $$Q = \{M q_N : M \in \mathcal{N}, N 为非负整数\},$$

则 $Q$ 是 $S$ 上半范基，$(S, H(Q))$ 是局部凸空间，简记作 $S$。

如 $(f_\gamma)$ 是 $S$ 中的网，$f \in S$，则

$f_\gamma \to f \Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{N}^d, x^\alpha D^\beta f_\gamma(x) \to x^\alpha D^\beta f(x)$，对 $x \in \boldsymbol{R}^d$ 一致成立。

$(f_\gamma)$ 是 Cauchy 网 $\Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \boldsymbol{N}^d$，$\{x^\alpha D^\beta f_\gamma(x)\}$ 对 $x \in \boldsymbol{R}^d$ 在一致收敛意义下是 Cauchy 网。

§ 16.2 **定理** ① 把 $S$ 映入 $C^\infty$ 的包含映射是连续的。

② $S$ 是 Frechet 空间。

[**证**] ① $\forall f \in S$，对所有的非负整数 $N$，对所有的紧集 $K \subset \boldsymbol{R}^d$，

$$p_{N,K}(f) \leq q_N(f)。$$

② 显然 $S$ 可距离化，因半范基 $Q$ 是可数多个半范构成的。如 $\{f_n\}$ 是 $S$ 中 Cauchy 序列，由 ①，$\{f_n\}$ 是 $C^\infty$ 中的 Cauchy 序列，由定理 7.3，$C^\infty$ 是完备的，$\exists f \in C^\infty$ 使

$$f_n \to f \quad \text{在 } C^\infty \text{ 中。}$$

因而 $\forall x \in \boldsymbol{R}^d, \forall \beta \in \boldsymbol{N}^d$,

$$D^\beta f_n(x) \to D^\beta f(x),$$

故 $\forall x \in \boldsymbol{R}^d$, $\forall \alpha \in \boldsymbol{N}^d$, $\forall \beta \in \boldsymbol{N}^d$,

$$x^\alpha D^\beta f_n(x) \to x^\alpha D^\beta f(x)\text{。}$$

因$\{f_n\}$是 $S$ 中的 Cauchy 列，$\forall \alpha,\beta \in \boldsymbol{N}^d$, $N = \max(|\alpha|, |\beta|)$,

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^d} |x^\alpha D^\beta f_n(x) - x^\alpha D^\beta f_m(x)| \leqslant q_N(f_n - f_m) \to 0,$$

当 $n,m \to \infty$ (16.2.1)

$\{x^\alpha D^\beta f_n(x)\}$ 对 $x \in \boldsymbol{R}^d$ 是一致的 Cauchy 列，故 $\exists M(\alpha,\beta) > 0$,对所有的 $n \in \mathcal{N}$,

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^d} |x^\alpha D^\beta f_n(x)| \leqslant M(\alpha,\beta) < \infty,$$

令 $n \to \infty$, 得 $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leqslant M(\alpha,\beta)$, 所以 $f \in S$。

由(16.2.1), $x^\alpha D^\beta f_n(x) \to x^\alpha D^\beta f(x)$ 对 $x \in \boldsymbol{R}^d$ 一致成立。上式对所有的 $\alpha$、$\beta$ 都成立，故对所有的非负整数 $N$,

$$q_N(f_n - f) \to 0, \text{ 当 } n \to \infty,$$

所以 $f_n \to f$ 在 $S$ 中。

§16.3 **定理** ① 设 $X$ 是完备的赋不变距离的拓扑线性空间($F$ 空间),$T$: $X \mapsto S$ 是线性映射,满足条件：

$f_n, f \in X, f_n \to f \Rightarrow$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上点点收敛意义下，$Tf_n \to Tf$,则 $T$ 是连续的。

② 设 $g$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上数值函数,如由 $f \in S$ 可推出 $fg \in S$,则映射 $f \mapsto fg$ 是把 $S$ 映入 $S$ 的连续映射,特别的,当$g$ 是多项式或 $g \in S$ 时,以上结论成立。

③ 如 $\alpha \in \boldsymbol{N}^d$,则微分映射 $f \mapsto D^\alpha f$ 是把 $S$ 映入 $S$ 的连续映射。

④ Fourier 变换 $\wedge$: $f \mapsto \hat{f}$ 是把 $S$ 映到 $S$ 上的连续线性映

射，且是 $S$ 到 $S$ 上的同胚。

⑤ 把 $D$ 映入 $S$ 的包含映射是连续的。

⑥ 如 $f\in S$，$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d$，$\forall\beta\in\boldsymbol{N}^d$，

$$\lim_{\|x\|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x)=0。$$

⑦ 设 $f\in S$，$\psi\in D$，$0\leqslant\psi\leqslant1$，在 $\boldsymbol{R}^d$ 的单位球上 $\psi=1$，对所有的正实数 $s$，定义 $\psi_s\in D$，由 $\psi_s(x)=\psi(sx)$，$x\in\boldsymbol{R}^d$，则

$$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^d,\forall\beta\in\boldsymbol{N}^d,\forall\gamma\in\boldsymbol{N}^d,$$

$\lim\limits_{s\to0} x^\alpha D^\beta f(x)\cdot D^\gamma(1-\psi_s(x))=0$，在 $\boldsymbol{R}^d$ 一致成立。

⑧ $D$ 在 $S$ 中稠。

［证］ ① 用闭图象定理（§2.13）即可推出。

②、③ 由 ① 推出。

④ 设 $f_n,f\in S$，且在 $S$ 中 $f_n\to f$ 当 $n\to\infty$，则

$$f_n\to f \text{ 在 } \boldsymbol{R}^d \text{ 上点点收敛。} \tag{16.3.1}$$

且对所有非负整数 $N$，

$$\sup_{n\in\mathscr{N}} q_N(f_n)<\infty。$$

由此，$\exists$正数 $M$，使得 $\forall n\in\mathscr{N}$，$\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{(1+x_1^2)\cdots(1+x_d^2)} \tag{16.3.2}$$

由(16.3.1)、(16.3.2)和控制收敛定理，$\forall t\in\boldsymbol{R}^d$，

$$\hat{f}_n(t)=\int f_n e_{-t}dm\to\int fe_{-t}dm=\hat{f}(t)。$$

由 ①，Fourier 变换 $\wedge:S\mapsto S$ 连续。

由定理 14.11②，$\wedge$ 是 $S\mapsto S$ 上的一一对应。由定理 14.11 ①，Fourier 变换 $\wedge$ 的逆映射即 $\wedge\wedge\wedge$，也是连续的，所以 $\wedge$ 是同胚。

⑤ 由 ① 推出。对 $\boldsymbol{R}^d$ 的每一紧子集 $K$，包含映射（恒等映射）：$I:D\mapsto S$ 在 $D_K$ 上的限制 $I|_{D_K}$ 是把 $D_K$ 映入 $S$ 的包含映射，

对所有的非负整数 $N$，

$$\forall\varphi\in D_K, q_N(\varphi)=\max_{|\alpha|\leqslant N,|\beta|\leqslant N}\sup_{x\in R^d}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|$$

$$\leqslant\max_{x\in K,|\alpha|\leqslant N}|x^\alpha|p_{N,K}(\varphi)。$$

所以 $I|_{D_K}: D_K\mapsto S$ 连续。由定理 8.2①，推出 $I: D\mapsto S$ 连续。

⑥ 由假设，$\exists$ 正数 $M$，使 $\forall x\in \boldsymbol{R}^d$，

$$|x^\alpha\|x\|^2D^\beta f(x)|\leqslant M,$$

即得 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x)=0$。

⑦ 对 $\|x\|<1/s$，$\psi_s(x)=1$，故

$$\sup_{x\in R^d}|x^\alpha D^\beta f(x)\cdot D^\gamma(1-\psi_s(x))|$$

$$=\sup_{\|x\|\geqslant 1/s}|x^\alpha D^\beta f(x)\cdot D^\gamma(1-\psi_s(x))|,$$

如 $\gamma=0$，上式$\leqslant \sup\limits_{\|x\|\geqslant 1/s}|x^\alpha D^\beta f(x)|$，

如 $\gamma\neq 0$，上式$\leqslant \sup\limits_{\|x\|\geqslant 1/s}|x^\alpha D^\beta f(x)\cdot s^{|\gamma|}q_{|\gamma|}(\psi)|$，

由⑥即推出要求的结果。

⑧ 设 $f\in S$，如 ⑦ 中取 $\psi$，并定义 $\psi_s$。由⑦，再用 Leibniz 公式，$\forall\alpha\in \boldsymbol{N}^d$，$\forall\beta\in \boldsymbol{N}^d$，

$\lim\limits_{s\to 0} x^\alpha D^\beta[f(x)(1-\psi_s(x))]=0$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上一致成立。

即在 $S$ 中，$f\psi_s\to f$ 当 $s\to 0$，

因 $f\psi_s\in D$，所以 $D$ 在 $S$ 中稠。

# 第十七节　缓增广义函数空间$S'$

**§17.1　引理**　如 $\Lambda$ 是 $D$ 上的线性泛函，且满足条件：

$$\exists N, \text{使} \ \forall \varphi \in D, \ |\Lambda(\varphi)| \leqslant N q_N(\varphi) \qquad (17.1.1)$$

则 $\Lambda$ 是有限阶的广义函数。

[证] 设 $|\alpha|, |\beta| \leqslant N$, $K$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的任一紧子集，$\forall \varphi \in D_K$，$\forall x \in \boldsymbol{R}^d$，

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leqslant \sup_{y \in K} |y^\alpha| \sup_{z \in K} |D^\beta \varphi(z)|,$$

所以 $q_N(\varphi) \leqslant \max\limits_{|\alpha| \leqslant N} \sup\limits_{y \in K} |y^\alpha| p_{N,K}(\varphi)$，

令 $M(K) = \max\limits_{|\alpha| \leqslant N} \sup\limits_{y \in K} |y^\alpha|$，则对任意的紧子集 $K$，$\forall \varphi \in D_K$，

$$|\Lambda(\varphi)| \leqslant N M(K) p_{N,K}(\varphi)。$$

所以 $\Lambda$ 是广义函数，且阶数 $\leqslant N$。

§17.2 **定义** 满足(17.1.1) 的广义函数 $\Lambda$ 称为**缓增广义函数**。

§17.3 **定理** ① 缓增广义函数可以唯一地延拓成 $S$ 上的连续线性泛函，且 $S$ 上连续线性泛函限制在 $D$ 上即成为缓增广义函数。这样，$S$ 上连续线性泛函的全体组成的线性空间 $S'$ 与缓增广义函数的全体之间存在着一一对应，且是线性同构，所以 $S'$ 可嵌入 $D'$，即 $S'$ 可看作 $D'$ 中所有缓增广义函数所组成的线性子空间。

② 任一有紧支集的广义函数 $\Lambda$ 是缓增的，即 $(C^\infty)' \subset S'$。

③ 设 $\mu$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上正 Borel 测度，且存在某一数 $k \geqslant 0$，使

$$\int \frac{d\mu}{(1+\|x\|^2)^k} < \infty,$$

则映射 $f \mapsto \int f d\mu$ 是 $S$ 上的连续线性泛函，$\Lambda_\mu$ 是缓增广义函数。

④ 设 $1 \leqslant p < \infty$，$g$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上可测函数，且对某一数 $k \geqslant 0$，有

$$B = \int \left| \frac{g(x)}{(1+\|x\|^2)^k} \right|^p dx < \infty,$$

则映射 $f\mapsto\int fg$ 是 $S$ 上连续线性泛函，$\Lambda_g$ 是缓增广义函数。

⑤ 如 $g\in L^p,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 或 $g$ 是被某多项式 $P$ 所控制的可测函数，即 $|g|\leqslant|P|$，a.e.，则 $f\mapsto\int fg$ 是 $S$ 上连续线性泛函，$\Lambda_g$ 是缓增广义函数。

〔证〕 ① 如 $\Lambda\in S'$，则由 $S$ 的拓扑的定义，

$$\exists N\in\mathscr{N},\ \forall\varphi\in S,|\Lambda(\varphi)|\leqslant Nq_N(\varphi),$$

因而上式对所有的 $\varphi\in D$ 也成立，所以 $\Lambda|_D$ 是缓增广义函数。

如果 $\Lambda$ 是缓增广义函数，则满足 (17.1.1)，由定理 16.3⑧，$D$ 在 $S$ 中稠，$\Lambda$ 可以唯一地延拓成 $S$ 上连续线性泛函，即 $\forall f\in S$，$\exists\{\varphi_n\}\subset D$，在 $S$ 中 $\varphi_n\to f$，故

$$|\Lambda(\varphi_n)-\Lambda(\varphi_m)|\leqslant Nq_N(\varphi_n-\varphi_m)\to 0,\text{当} n,m\to\infty,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda(\varphi_n)$ 存在，定义 $\Lambda(f)=\lim\limits_{n\to\infty}\Lambda(\varphi_n)$，$\Lambda(f)$ 是被 $f$ 唯一确定的，与逼近序列 $\{\varphi_n\}$ 的选取无关。对不等式，

$$|\Lambda(\varphi_n)|\leqslant Nq_N(\varphi_n),\ \text{令}\ n\to\infty,$$

$$|\Lambda(f)|\leqslant Nq_N(f),$$

所以 $\forall f\in S$，(17.1.1) 的不等式仍成立。因此 $\Lambda\in S'$。

以上已证明了 $S'$ 与缓增广义函数全体之间存在着线性同构，$S'\subset D'$。

② 由定理 10.8②，存在 $C^\infty$ 上连续线性泛函 $\Sigma$，使 $\Sigma|_D=\Lambda$，故 $\Lambda=(\Sigma|_S)|_D$，由定理 16.2①，包含映射 $I:S\hookrightarrow C^\infty$ 连续，所以 $\Sigma|_S\in S'$，因此 $\Lambda$ 是缓增广义函数。

③ $\forall f\in S,\ \forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$|f(x)(1+\|x\|^2)^k|\leqslant(d+1)^k q_{2k}(f),$$

所以
$$\left|\int f\,d\mu\right|\leqslant(d+1)^k q_{2k}(f)\int\frac{d\mu}{(1+\|x\|^2)^k},$$

因此 $f\mapsto\int f\,d\mu$ 是 $S$ 上连续线性泛函。

④ 设 $1/r+1/p=1$，取 $N>k$，使

$$A=\int\frac{dx}{(1+\|x\|^2)^{(N-k)r}}<\infty,$$

因而 $\forall f\in S,\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$|f(x)(1+\|x\|^2)^k|^r=|f(x)(1+\|x\|^2)^N|^r\frac{1}{(1+\|x\|^2)^{(N-k)r}}$$

$$\leqslant[(d+1)^N q_{2N}(f)]^r\frac{1}{(1+\|x\|^2)^{(N-k)r}},$$

所以 $\int|f(x)(1+\|x\|^2)^k|^r dx\leqslant A[(d+1)^N q_{2N}(f)]^r$，

$$\left[\int|f(x)(1+\|x\|^2)^k|^r dx\right]^{1/r}\leqslant A^{1/r}(d+1)^N q_{2N}(f)。$$

由 Hölder 不等式，

$$\left|\int fg\,dx\right|\leqslant\int|fg|\,dx$$

$$\leqslant\int|f(x)(1+\|x\|^2)^k|\cdot\left|\frac{g(x)}{(1+\|x\|^2)^k}\right|dx$$

$$\leqslant A^{1/r}q_{2N}(f)\cdot B^{1/p}。$$

所以 $f\mapsto\int fg\,dx$ 是 $S$ 上连续线性泛函。

⑤ 由④推出。

§17.4 **引理** 设 $g\in L^1$，则

① $\Lambda_g$ 是缓增的。

② $\hat{g}$ 局部可积。

③ $\Lambda_{\hat{g}}=\Lambda_g\circ\wedge\in S'$。

**〔证〕** ① 由定理 17.3 ⑤ 推出。

② 由定理 14.3①，$\hat{g}$ 在 $\boldsymbol{R}^d$ 上连续，所以局部可积。

③ 设 $f\in S$，由引理 14.2⑥，因 $f\in L^1$，

$$\Lambda_{\hat{g}}(f)=\int \hat{g} f\,dx=\int g\hat{f}dx=\Lambda_g(\hat{f})。$$

而由定理 16.3④，Fourier 变换 $\wedge$ 是 $S\mapsto S$ 的连续线性映射。所以 $\Lambda_{\hat{g}}\in S'$。

如果 $\Lambda_g$，$\Lambda_{\hat{g}}$ 定义为 $\Lambda_g(f)=\int gf\,dm$，$\Lambda_{\hat{g}}=\int \hat{g}f\,dm$，等式仍成立。

§ 17.5 **引理** 设 $g\in L^2$，则

① $\Lambda_g$ 是缓增的。

② $\hat{g}\in L^2$。

③ $\Lambda_{\hat{g}}=\Lambda_g\circ\wedge\in S'$。

[**证**] ① 由定理 17.3 ⑤ 推出。

② 由 § 14.11 ⑦ 的 Plancherel 定理推出。

③ 设 $f\in S, h\in S$，由引理 14.2⑥，

$$\int \hat{f}h=\int f\hat{h},$$

因 $S$ 在 $L^2$ 中稠，且 Fourier 变换 $\wedge: L^2\mapsto L^2$ 连续，故

$$\int\hat{g}f=\int g\hat{f}。$$

§ 17.6 **定义** 设 $\Lambda\in S'$，由下式定义 $S$ 上的线性泛函 $\hat{\Lambda}$：

$$\hat{\Lambda}(f)=\Lambda(\hat{f}),\qquad f\in S,$$

由定理 16.3④，映射 $f\mapsto\hat{f}$ 是 $S\mapsto S$ 连续的，所以 $\hat{\Lambda}\in S'$。$\hat{\Lambda}$ 称为缓增广义函数 $\Lambda$ 的 **Fourier 变换**。Fourier 变换 $\wedge$ 是 $S'\mapsto S'$ 的线性映射。

由引理 17.4、17.5，如 $g\in L^1$ 或 $g\in L^2$，则 $\hat{\Lambda}_g=\Lambda_{\hat{g}}$，即 $L^1$ 或 $L^2$ 中函数 $g$ 的 Fourier 变换 $\hat{g}$，作为广义函数，与广义函数 $\Lambda_g$

的 Fourier 变换 $\hat{\Lambda}_g$ 是一致的。这样 Fourier 变换已延拓到了 $S'$ 上。

对线性空间 $S'$，我们赋予弱 * 拓扑 $\sigma(S', S)$。即对 $S$ 中任一有限集 $F=\{f_1,\cdots,f_n\}$，定义

$$p_F(\Lambda)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\Lambda(f_i)|,\quad \Lambda\in S',$$

则 $p_F=p_{f_1,\cdots,f_n}$ 是 $S'$ 上的半范。

令 $$P=\{p_F: F\text{ 为 }S\text{ 中的有限集}\},$$

则 $P$ 是 $S'$ 上的半范基，由半范基 $P$ 可生成局部凸空间 $(S', H(P))$，此即是弱 * 拓扑 $\sigma(S',S)$。

§ 17.7 **定理**

① 如 $\Lambda\in S'$，$g$ 如定理 16.3②，即使映射 $f\mapsto fg$ 是 $S\mapsto S$ 连续的，特别的可设 $g$ 是多项式或 $g\in S$，则 $g\Lambda\in S'$，且乘子映射 $\Lambda\mapsto g\Lambda$ 是 $S'\mapsto S'$ 的连续线性映射。

② 如 $\Lambda\in S'$，$\alpha$ 是 $d$ 重整数，则 $D^\alpha\Lambda\in S'$，且微分映射 $\Lambda\mapsto D^\alpha\Lambda$ 是 $S'\mapsto S'$ 的连续线性映射。

③ Fourier 变换 $\wedge$ 是 $S'\mapsto S'$ 的连续线性映射。

④ 对所有的 $\Lambda\in S'$，重复四次 Fourier 变换，$\Lambda^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=\Lambda$，故 Fourier 变换 $\wedge$ 是 $S'$ 到 $S'$ 上的一一对应，且是线性同构和同胚。

⑤ 如 $\Lambda\in S'$，$P$ 是多项式，则。

$$(P(-iD)\Lambda)^\wedge=P\hat{\Lambda},\ (P\Lambda)^\wedge=P(iD)\hat{\Lambda}。$$

[证] ① 由定理 16.3 ②。

② 由定理 16.3 ③。

③ 由定理 16.3 ④。

④ 由定理 14.11 ①。

⑤ 只需考虑 $P(x)=x^\alpha$ 情况，$\forall f\in S$，

$$(P(-iD)\Lambda)^\wedge(f)=((-iD)^\alpha\Lambda)(\hat{f})=\Lambda((iD)^\alpha\hat{f})$$

（由定理 14.6 ③）

$$= \Lambda((Pf)^{\wedge}) = \hat{\Lambda}(Pf) = (P\hat{\Lambda})(f)。$$

所以 $$(P(-iD)\Lambda)^{\wedge} = P\hat{\Lambda}。$$

类似的 $$(P\Lambda)^{\wedge}(f) = (P\Lambda)(\hat{f}) = \Lambda(P\hat{f})$$

(由定理 14.6 ②)

$$= \Lambda((P(-iD)f)^{\wedge}) = \hat{\Lambda}(P(-iD)f)$$

$$= (P(iD)\hat{\Lambda})(f)。$$

所以 $$(P\Lambda)^{\wedge} = P(iD)\hat{\Lambda}。$$

§17.8 **定义** 如 $\Lambda \in S'$，由下式定义 $\check{\Lambda} \in S'$：

$$\check{\Lambda}(f) = \Lambda(\check{f}), \qquad f \in S。$$

§17.9 **定理(反演定理)** 对所有的 $\Lambda \in S'$，$\Lambda^{\wedge\vee\wedge} = \Lambda^{\wedge\wedge\vee} = \Lambda^{\vee\wedge\wedge} = \Lambda$。

[证] 由定理 14.11 ① 推出。

§17.10 **注** 设 $I$ 是由下式给出的缓增广义函数：

$$I(f) = \int f dm, \qquad f \in S。$$

则对所有的 $f \in S$，

$$\hat{I}(f) = I(\hat{f}) = \int \hat{f}\, dm = f^{\wedge\wedge}(0) = f(0),$$

$$\hat{\delta_0}(f) = \delta_0(\hat{f}) = \hat{f}(0) = \int f dm = I(f),$$

所以 $$\hat{I} = \delta_0,\ \hat{\delta_0} = I。$$

由定理 17.7⑤，如 $P$ 是多项式，则

$$(P(-iD)\delta_0)^{\wedge} = P\hat{\delta_0} = PI。$$

$$(PI)^{\wedge} = P(iD)\hat{I} = P(iD)\delta_0。$$

这样，由定理 11.7，$\Lambda \in D'(\Omega)$ 是多项式 $\Lambda_P$ 的 Fourier 变换 $\Longleftrightarrow \Lambda = 0$ 或 $\operatorname{supp} \Lambda = \{0\}$。

§17.11 **引理**

① 映射 $\vee: S \mapsto S$ 是连续的。

② 如 $x \in \boldsymbol{R}^d$，平移映射 $\tau_x$：$S \mapsto S$ 是连续的。

［证］ 由定理 16.3 ① 推出。

§ 17.12 **定义** 如 $\Lambda \in S', f \in S$，由下式在 $\boldsymbol{R}^d$ 上定义数值函数 $\Lambda * f$：

$$(\Lambda * f)(x) = \Lambda(\tau_x \check{f}), \qquad x \in \boldsymbol{R}^d.$$

如 $x \in \boldsymbol{R}^d, \Lambda \in S'$，定义 $\tau_x \Lambda$ 如下：

$$(\tau_x \Lambda)(f) = \Lambda(\tau_{-x} f), \quad f \in S.$$

由引理 17.11，$\tau_x \Lambda \in S'$。

§ 17.13 **引理** 设 $j \in \{1, \cdots, d\}$，对所有的非零的实数 $h$，定义 $\psi_h \in C^\infty(R^d)$ 如下：

$$\psi_h(t) = \frac{e^{-iht_j} - 1}{h} + it_j, \quad t \in \boldsymbol{R}^d \tag{17.13.1}$$

则对所有的 $g \in S$，在 $S$ 中，$\lim\limits_{h \to 0} \psi_h g = 0$。

［证］ $\forall t \in \boldsymbol{R}^d, |\psi_h(t)| \leqslant |h| |t_j|^2$，

$$|D_j \psi_h(t)| = |1 - e^{-iht_j}| \leqslant |ht_j|,$$

如 $k \geqslant 2, \forall t \in \boldsymbol{R}^d$，

$$|D_j^k \psi_h(t)| = |h^{k-1} e^{-iht_j}| \leqslant |h|^{k-1}.$$

这样，$\forall \alpha \in \boldsymbol{N}^d, \forall \beta \in \boldsymbol{N}^d, \forall g \in S$，

$$\lim_{h \to 0} t^\alpha [D^\beta \psi_h(t)] g(t) = 0, \text{ 对 } t \in \boldsymbol{R}^d \text{ 一致成立。}$$

由 Leibniz 公式，$\forall \alpha \in \boldsymbol{N}^d, \forall \beta \in \boldsymbol{N}^d, \forall g \in S$，

$$\lim_{h \to 0} t^\alpha D^\beta (\psi_h g)(t) = 0, \text{ 对 } t \in \boldsymbol{R}^d \text{ 一致成立。}$$

所以在 $S$ 中，$\lim\limits_{h \to 0} \psi_h g = 0$。

§ 17.14 **定理**

① 设 $g$ 如定理 17.3 ④，即

$$\int \left| \frac{g(x)}{(1 + \|x\|^2)^k} \right|^p dx < \infty, \ p \geqslant 1, \ k \geqslant 0,$$

且 $f\in S$,则 $\Lambda_g * f = g * f$。

这里右边的卷积按通常的积分来定义。如 $\Lambda_g$ 定义为：

$$\Lambda_g(\varphi)=\int \varphi g\,dm,\ 取\ (g*f)(x)=\int g(x-y)f(y)dm(y)。$$

② 如 $x\in \boldsymbol{R}^d,\Lambda\in S',f\in S$,则

$$\tau_x(\Lambda * f)=(\tau_x\Lambda)*f=\Lambda*(\tau_x f)。$$

③ 如 $\Lambda\in S'$, $f\in S$, 则 $\Lambda * f\in C^\infty$, 且对所有的 $d$ 重整数 $\alpha$,

$$D^\alpha(\Lambda * f)=(D^\alpha\Lambda)*f=\Lambda*(D^\alpha f)。$$

④ 如 $\Lambda\in S'$,,则映射 $L$: $f\mapsto\Lambda * f$ 是把 $S$ 映入 $C^\infty$ 的连续线性映射,且满足：

$$\forall x\in \boldsymbol{R}^d,\tau_x L=L\tau_x \tag{17.14.1}$$

⑤ 如 $L:S\mapsto C(\boldsymbol{R}^d)$ 是满足(17.14.1) 的连续线性映射,则存在唯一的 $\Lambda\in S'$ 使得

$$\forall f\in S,\ Lf=\Lambda * f。$$

⑥ 设 $\Lambda\in S'$,则存在整数 $k\geqslant 0$,使得 $\forall f\in S,\forall x\in \boldsymbol{R}^d$,

$$|(\Lambda * f)(x)|\leqslant k(1+\|x\|^2)^k q_k(f)。$$

⑦ 如 $\lambda\in S',f\in S$,则 $\Lambda_{(\lambda * f)}$ 是缓增广义函数。

⑧ 如 $\lambda\in S'$, 则映射 $f\mapsto\Lambda_{(\lambda * f)}$ 是把 $S$ 映入 $S'$ 的连续映射。

⑨ 如 $f\in S$, 则映射 $g\mapsto f * g$ 是把 $S$ 映入 $S$ 的连续线性映射。

⑩ 如 $\lambda\in S',f\in S,g\in S$, 则

$$\lambda*(f*g)=(\lambda*f)*g=(\lambda*g)*f。$$

⑪ 如 $\lambda\in S',f\in S$,则

$\hat{\Lambda}_{\lambda * f}=\hat{f}\hat{\lambda}$,或简记作 $(\lambda * f)^\wedge=\hat{f}\ \hat{\lambda}$。这里及今后,$\Lambda_g$ 由下式定义：$\Lambda_g(\varphi)=\int\varphi g\,dm$, $\varphi\in S$ 或 $D$。

⑫ 如 $\lambda\in S', f\in S$，则

$\Lambda_{\hat{\lambda}}\cdot\hat{f}=(f\lambda)^{\wedge}$，或简记作 $\hat{\lambda}*\hat{f}=(f\lambda)^{\wedge}$。

［证］ ① 如引理 13.4。

② 如引理 13.5 ①。

③ 设 $j\in\{1,\cdots,d\}$ 且 $f\in S$，对所有的非零实数 $h$，定义 $\rho_h\in S$ 如下：

$$\rho_h=\frac{\tau_{he_j}f-f}{h}+D_j f,$$

由引理 14.2③，$(\tau_x f)^{\wedge}=e_{-x}\hat{f}$，由定理 14.6②，$(P(-iD)f)^{\wedge}=P\hat{f}$，

$\hat{\rho}_h=\psi_h\hat{f}$，$\psi_h$ 如(17.13.1)。

由引理 17.13 和定理 14.6 ④，$\hat{f}\in S$，在 $S$ 中，$\hat{\rho}_h\to 0$，当 $h\to 0$。

由定理 16.3 ④，$f\mapsto\hat{f}$ 是 $S\to S$ 上的同胚，所以

在 $S$ 中，$\rho_h\to 0$，当 $h\to 0$。

用引理 17.11，可如定理 13.5 ② 那样证得结果。

④ 如定理 13.6 ① 和定理 13.7 ①。

⑤ 如定理 13.7 ②。

⑥ 取偶数 $N$，使 $\forall g\in S$，

$$|\Lambda(g)|\leqslant N\max_{|\alpha|<N,|\beta|<N}\sup_{y\in R^d}|y^{\alpha}D^{\beta}g(y)| \tag{17.14.2}$$

设 $f\in S, x\in \boldsymbol{R}^d$，在(17.14.2)中取 $g=\tau_x\check{f}$，则

$$\begin{aligned}|(\Lambda*f)(x)|&=|\Lambda(\tau_x\check{f})|\\&\leqslant N\max_{|\alpha|<N,|\beta|<N}\sup_{y\in R^d}\|y\|^{|\alpha|}|D^{\beta}f(x-y)|\\&\leqslant N\max_{|\alpha|<N,|\beta|<N}\sup_{z\in R^d}\|x-z\|^{|\alpha|}|D^{\beta}f(z)|。\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\|x-z\|&\leqslant\|x\|+\|z\|\leqslant(1+\|x\|)(1+\|z\|)\\&\leqslant 2(1+\|x\|^2)^{1/2}(1+\|z\|)^{1/2},\end{aligned}$$

所以 $$|(\Lambda * f)(x)| \leqslant N 2^N (1+\|x\|^2)^{N/2} \times \max_{|\beta| < N} \sup_{z \in \mathbf{R}^d} (1+\|z\|^2)^{N/2} |D^\beta f(z)|。$$

$\exists z_0 \in \mathbf{R}^d$，使

$$\sup_{z \in \mathbf{R}^d} (1+\|z\|^2)^{N/2} |D^\beta f(z)| = (1+\|z_0\|^2)^{N/2} |(D^\beta f)(z_0)|$$
$$\leqslant (d+1)^{N/2} \max_{|\alpha| < N} \sup_{z \in \mathbf{R}^d} |z^\alpha D^\beta f(z)|,$$

取 $k = N\, 2^N (d+1)^{N/2}$，则

$$|(\Lambda * f)(x)| \leqslant k(1+\|x\|^2)^k q_k(f)。$$

⑦ 由⑥和定理 17.3 ⑤ 推出。

⑧ 设 $f_n, f, g \in S$，且在 $S$ 中，$f_n \to f$，由 ④，

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, (\lambda * f_n)(x) \to (\lambda * f)(x)。$$

所以 $$(\lambda * f_n)(x) \cdot g(x) \to (\lambda * f)(x) \cdot g(x)。\tag{17.14.3}$$

取⑥中存在的 $k$，因在 $S$ 中，$f_n \to f$，

$$M = \sup_{n > 1} q_k(f_n) < \infty,$$

由⑥，$\forall x \in \mathbf{R}^d$，$\forall n \in \mathscr{N}$，

$$|(\lambda * f_n)(x) \cdot g(x)| \leqslant Mk(1+\|x\|^2)|g(x)|。$$

因 $g \in S$，由控制收敛定理和(17.14.3)，

$$\int (\lambda * f_n) g \to \int (\lambda * f) g,$$

因对所有的 $g \in S$，上式成立，故证得

$$\Lambda_{\lambda * f_n} \to \Lambda_{\lambda * f} \quad 在 S' 中,$$

所以映射 $f \mapsto \Lambda_{\lambda * f}$ 是 $S \to S'$ 连续的。

⑨ 由①和④，映射 $g \mapsto f * g$ 是 $S \mapsto C^\infty$ 连续的。由定理 14.11④，$f * g \in S$，故上述映射把 $S$ 映入 $S$。由定理 16.3①，推出它是 $S \mapsto S$ 连续的。

⑩ 由 ⑦⑧⑨ 和引理 17.11，以下定义的 $S \times S$ 上的两个双线性泛函

$$(f, g) \mapsto \Lambda_{\lambda * f}(\check{g}),$$

$$(f,g)\mapsto\lambda((f*g)^{\vee})$$

都是分别连续的。如 $f,g\in D$，由定理 13.14 ①，

$$\Lambda_{\lambda*f}(\check{g})=\int(\lambda*f)\check{g}\,dm=((\lambda*f)*g)(0)$$
$$=(\lambda*(f*g))(0)=\lambda((f*g)^{\vee})。$$

因 $D$ 在 $S$ 中稠，故对所有的 $f,g\in S$，

$$\Lambda_{\lambda*f}(\check{g})=\lambda((f*g)^{\vee}) \qquad (17.14.4)$$

（$\Lambda_{\lambda*f}$ 定义为 $\Lambda_{\lambda*f}(\varphi)=\int(\lambda*f)\varphi\,dm$，$\varphi\in S$，右边的卷积按定义 14.1 ②。）

即 $((\lambda*f)*g)(0)=(\lambda*(f*g))(0)$。

把 $g$ 换成 $\tau_{-x}g$，得

$$(\lambda*f)*g=\lambda*(f*g),$$

由于卷积 $f*g=g*f$，

$$(\lambda*g)*f=\lambda*(f*g)。$$

⑪ 设 $g\in S$，则

$$\hat{\Lambda}_{\lambda*f}(g)=\Lambda_{\lambda*f}(\hat{g})=\Lambda_{\lambda*f}(g^{\wedge\vee\vee})$$

由(17.14.4)，　　上式 $=\lambda((f*g^{\wedge\vee})^{\vee})$，

由引理 14.10 ②，上式 $=\lambda(\check{f}*g^{\wedge\vee\vee})=\lambda(\check{f}*\hat{g})$

由引理 14.11 ①，　上式 $=\lambda(f^{\wedge\wedge}*\hat{g})$，

由定理 14.11 ⑤，　上式 $=\lambda((\hat{f}g)^{\wedge})=\hat{\lambda}(\hat{f}g)=(\hat{f}\hat{\lambda})(g)$。

所以 $\hat{\Lambda}_{\lambda*f}=\hat{f}\,\hat{\lambda}$。

其中 $\Lambda_{\lambda*f}(g)=\int(\lambda*f)\cdot g\,dm,\ g\in S,$

（以上证明中两函数的卷积按定义 14.1 ②）

⑫ 设 $g\in S$，由定理 14.11 ①，

$$\Lambda_{\hat{\lambda}*\hat{f}}(g)=\Lambda_{\hat{\lambda}*\hat{f}}(g^{\wedge\wedge\vee})。$$

由(17.14.4)，上式 $=\hat{\lambda}((\hat{f}*g^{\wedge\wedge})^{\vee})=\lambda((\hat{f}*g^{\wedge\wedge})^{\vee\wedge})$，

由引理 14.10 ①，上式 $=\lambda((\hat{\hat{f}} * g^{\wedge\wedge})^{\wedge\vee})$，

由引理 14.2 ⑤，上式 $=\lambda((f^{\wedge\wedge}\cdot g^{\wedge\wedge\wedge})^{\vee})=\lambda(f^{\wedge\wedge\vee}\cdot g^{\wedge\wedge\wedge\vee})$，

由定理 14.11 ①，上式 $=\lambda(f\hat{g})=(f\lambda)(\hat{g})=(f\lambda)^{\wedge}(g)$。

所以
$$\Lambda_{\hat{\lambda}\cdot\hat{f}}=(f\lambda)^{\wedge}。$$

# 第十八节 Paley-Wiener 定理

§ 18.1 **定义** 设 $z\in \boldsymbol{C}^d$，定义 $e_z: \boldsymbol{R}^d\mapsto \boldsymbol{C}$ 如下：
$$e_z(x)=\exp(iz\cdot x),\quad x\in \boldsymbol{R}^d,$$
其中 $z\cdot x=z_1x_1+\cdots+z_dx_d$。

如 $f\in L^1(m)$ 且有紧支集，定义 $\tilde{f}: \boldsymbol{C}^d\mapsto \boldsymbol{C}$ 如下：
$$\tilde{f}(z)=\int e_{-z}f\,dm=\int e^{-iz\cdot x}f(x)\,dm(x),$$
$\tilde{f}$ 称为 $f$ 的 **Fourier-Laplace 变换**，映射 $f\mapsto \tilde{f}$ 也称为 **Fourier-Laplace 变换**。

显然
$$\tilde{f}|_{R^d}=\hat{f}。$$
记
$$rB=\{x\in \boldsymbol{R}^d: \|x\|\leqslant r\},$$
$\operatorname{Im} z=(\operatorname{Im} z_1,\cdots,\operatorname{Im} z_d)$，$\|z\|=(|z_1|^2+\cdots+|z_d|^2)^{1/2}$，

$\|\operatorname{Im} z\|=[(\operatorname{Im} z_1)^2+\cdots+(\operatorname{Im} z_d)^2]^{1/2}$。

§ 18.2 **Paley-Wiener 定理**

① 如 $\varphi\in D_{rB}(R^d)$，则 $\tilde{\varphi}(z)$ 是整函数，且对任意非负整数 $N$ 和 $z\in \boldsymbol{C}^d$，
$$|\tilde{\varphi}(z)|\leqslant 2^{N/2}(d+1)^{N/2}\max_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha\varphi\|_1\frac{e^{r\|\operatorname{Im} z\|}}{(1+\|z\|)^N}。$$
$$(\text{以上 } \|D^\alpha\varphi\|_1=\int|D^\alpha\varphi|\,dm)$$

② 如 $\varphi\in D_{rB}(R^d)$，则存在常数 $r_0,r_1,\cdots$，依赖于 $\varphi$，而不依赖于 $r$，使得对所有的非负整数 $N$ 和 $z\in \boldsymbol{C}^d$，

$$|\widetilde{\varphi}(z)|\leqslant r_N\frac{e^{r\|\operatorname{Im}z\|}}{(1+\|z\|)^N}.$$

③ 设 $f$ 是 $C^d$ 上整函数，且存在 $r_0, r_1, \cdots$，使得对所有的非负整数 $N$ 和 $z\in C^d$，有

$$|f(z)|\leqslant r_N\frac{e^{r\|\operatorname{Im}z\|}}{(1+\|z\|)^N},$$

则存在 $\varphi\in D_{rB}(R^d)$，使 $f=\widetilde{\varphi}$，在 $C^d$ 上。

〔证〕 ① $\forall x\in rB$，

$$|e_{-z}(x)|=|e^{-iz\cdot x}|=e^{\operatorname{Im}z\cdot x}\leqslant e^{\|\operatorname{Im}z\|\cdot\|x\|}\leqslant e^{r\|\operatorname{Im}z\|}。$$

如定理 14.4 ① 的证明，$\widetilde{\varphi}$ 是整函数。如定理 14.6 ② 的论证，

$$\int D^\alpha\varphi\cdot e_{-z}\,dm=(iz)^\alpha\widetilde{\varphi}(z)。$$

（其中 $(iz)^\alpha=(iz_1)^{\alpha_1}\cdots(iz_d)^{\alpha_d}$）

所以 $$|z^\alpha||\widetilde{\varphi}(z)|=\left|\int D^\alpha\varphi\cdot e_{-z}\,dm\right|\leqslant\|D^\alpha\varphi\|_1e^{r\|\operatorname{Im}z\|}\tag{18.2.1}$$

如(15.2.2)式的证明，

$$(1+\|z\|)^N\leqslant 2^{N/2}(d+1)^{N/2-1}\left(1+\sum_{j=1}^d|z_j|^N\right),$$

由(18.2.1)，

$$(1+\|z\|)^N|\widetilde{\varphi}(z)|\leqslant 2^{N/2}(d+1)^{N/2-1}(\|\varphi\|_1+\|D_1^N\varphi\|_1+\cdots+\|D_d^N\varphi\|_1)e^{r\|\operatorname{Im}z\|},$$

所以 $$|\widetilde{\varphi}(z)|\leqslant 2^{N/2}(d+1)^{N/2}\max_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha\varphi\|_1\frac{e^{r\|\operatorname{Im}z\|}}{(1+\|z\|)^N}.$$

② 由①推出，其中 $r_N=2^{N/2}(d+1)^{N/2}\max\limits_{|\alpha|\leqslant N}\|D^\alpha\varphi\|_1$。

③ 记 $g=f|_{R^d}$，对所有的非负整数 $N$ 和 $x\in \boldsymbol{R}^d$，

$$|\check{g}(x)|=|g(-x)|\leqslant\frac{r_N}{(1+\|x\|)^N}，所以\ \check{g}\in L^1。$$

令 $\varphi = (\check{g})^\wedge$，由定理 14.4 ②，

$$\varphi \in C^\infty(R^d) \tag{18.2.2}$$

设 $z \in \boldsymbol{C}^d$ 且 $z = x + iy$，这里 $x, y \in \boldsymbol{R}^d$，则 $\forall t_j \in \boldsymbol{R}$，

$$|e^{it_j z_j} f(z)| \leqslant e^{-t_j y_j} r_2 \frac{e^{r\|y\|}}{1 + |x_j|^2},$$

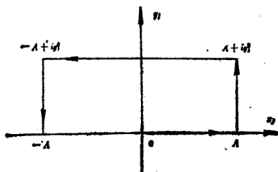
（以上 $z_j = x_j + iy_j$）。

故对所有的 $j \in \{1, \cdots, d\}$，$t_j, y_j \in \boldsymbol{R}$ 和 $z_1, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_d \in \boldsymbol{C}$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_j(x_j + iy_j)} f(z_1, \cdots, z_{j-1}, x_j + iy_j, z_{j+1}, \cdots, z_d) dx_j \tag{18.2.3}$$

存在。

把 Cauchy 积分定理用到围道：




$$z_j = x_j + iy_j$$

$$\oint e^{-it_j z_j} f(z_1, \cdots, z_j, \cdots, z_d) dz_j = 0,$$

$$\left|\int_A^{A+iy_j^0} e^{-it_j z_j} f(z)\, dz_j\right| \leqslant \int_0^{y_j^0} e^{-t_j y_j} \frac{e^{r\|y\|}}{1 + A^2} dy_j \to 0,$$ 当

$A \to \infty$，同理 $\int_{-A+iy_j^0}^{-A} e^{-it_j z_j} f(z) dz_j \to 0$，当 $A \to \infty$，

所以 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{it_j z_j} f(z) dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_j x_j} f(z_1, \cdots, x_j, \cdots, z_d) dx_j$。

因此(18.2.3)式中的积分与 $y$, 无关。由此 $\forall t\in \boldsymbol{R}^d, \forall y\in \boldsymbol{R}^d$

$$\int_{R^d} e^{i(x+iy)\cdot t} f(x+iy)\, dm(x) = \int_{R^d} e^{ix\cdot t} f(x) dm(x),$$

以上的积分与 $y$ 无关。这样, $\forall t\in \boldsymbol{R}^d, \forall y\in \boldsymbol{R}^d$,

$$\varphi(t) = \int e_{-t}\check{g}\, dm = \int e_t g\, dm = \int_{R^d} e^{i(x+iy)\cdot t} f(x+iy)\, dm(x) \tag{18.2.4}$$

固定 $N$ 使得 $\displaystyle\int_{R^d} \frac{dm(x)}{(1+\|x\|)^N} < \infty$,

在(18.2.4)式中, 令 $y=\lambda t$, 其中 $\lambda>0$,

$$\varphi(t) = \int_{R^d} e^{i(x+i\lambda t)\cdot t} f(x+i\lambda t) dm(x),$$

所以

$$|\varphi(t)| \leqslant \int_{R^d} e^{-\lambda\|t\|^2} r_N \frac{e^{r\lambda\|t\|}}{(1+\|x\|)^N} dm(x)$$

$$= r_N \left[\int_{R^d} \frac{dm(x)}{(1+\|x\|)^N}\right] e^{\lambda\|t\|(r-\|t\|)}。$$

如 $\|t\|\geqslant r$, 令 $\lambda\to+\infty$, $\varphi(t)=0$, 这样由(18.2.2),

$$\varphi\in D_{rB}(R^d)。$$

因 $\check{g}$, $(\check{g})\hat{} = \varphi\in L^1$, 由定理 14.11 ③,

$$\check{g} = g^{\vee\wedge\wedge\vee}\ \text{a.e.}, \quad 即\ \check{g} = (\hat{\varphi})^{\vee}\ \ \text{a.e.},$$

所以

$$g = \hat{\varphi}\quad \text{a.e.}。$$

由于 $g$ 和 $\hat{\varphi}$ 都是连续的, 故在 $\boldsymbol{R}^d$ 上, $g=\hat{\varphi}$, 因 $f|_{R^d}=g$, $\widetilde{\varphi}|_{R^d}=\hat{\varphi}$, 而 $f$, $\widetilde{\varphi}$ 都是整函数, 故在 $\boldsymbol{C}^d$ 上, $f=\widetilde{\varphi}$。

§ 18.3 **定理** 设 $\Lambda$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数, 且有紧支集, 由定理 10.8 ②, 存在唯一的连续延拓, 把 $\Lambda$ 延拓成 $C^\infty(R^d)$ 上的连续线性泛函。因而对所有的 $x\in \boldsymbol{R}^d$, $g(x)=\Lambda(e_{-x})$ 有定义。由定理 10.7 ③, 可取 $\psi\in D$, 使 $\Lambda=\psi\Lambda$, 则有

① $g=\hat{\Lambda} * \hat{\psi}$。

② $\Lambda_g$ 是缓增的广义函数。

③ $\forall f\in S$; $\hat{\Lambda}(f)=\int f_{\cdot}g\,dm$，故

$$\hat{\Lambda}=\Lambda_g。$$

［证］ ① 设 $x\in \boldsymbol{R}^d$，则

$$g(x)=\Lambda(e_{-x})=(\psi\Lambda)(e_{-x})=\Lambda(e_{-x}\psi),$$

由定理 14.11 ①，　上式 $=\Lambda(e_{-x}\psi^{\wedge\vee\wedge})$，

由引理 14.2，　　上式 $=\Lambda((\tau_x(\hat{\psi})^{\vee})^{\wedge})=\hat{\Lambda}(\tau_x(\hat{\psi})^{\vee})$，

由定义 17.12，　　上式 $=(\hat{\Lambda}*\hat{\psi})(x)$，

所以
$$g=\hat{\Lambda}*\hat{\psi}。$$

② 由定理 17.14 ⑦ 推出。

③ $\hat{\Lambda}=(\psi\Lambda)^{\wedge}$，由定理 17.14 ⑫，

$$(\psi\Lambda)^{\wedge}=\Lambda_{\hat{\Lambda}*\hat{\psi}}=\Lambda_g\ （由 ①）$$

所以
$$\hat{\Lambda}=\Lambda_g。$$

§ 18.4　**定义**　设 $\Lambda$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数，有紧支集。如定理 18.3 所述，$\forall z\in \boldsymbol{C}^d$，$\widetilde{\Lambda}(z)=\Lambda(e_{-z})$有定义，函数 $\widetilde{\Lambda}:\boldsymbol{C}^d\mapsto \boldsymbol{C}$ 称为广义函数 $\Lambda$ 的 **Fourier-Laplace 变换**，简记作 F.L.T.。

如 $f\in L^1$，且有紧支集，则 $\widetilde{\Lambda_f}=\widetilde{f}$。

§ 18.5　**Paley-Wiener-Schwartz 定理**

① 设 $\Lambda$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数，有支集 $\subset rB$，则 $\widetilde{\Lambda}$ 是整函数，且存在正常数 $b$，非负整数 $N$，使 $\forall z\in \boldsymbol{C}^d$，

$$|\widetilde{\Lambda}(z)|\leqslant b(1+\|z\|)^N e^{r\|\mathrm{Im}\,z\|}。$$

② 如 $f:\boldsymbol{C}^d\mapsto \boldsymbol{C}$ 是整函数，且满足：$\exists b>0$，$\exists$ 整数 $N\geqslant 0$，使 $\forall z\in \boldsymbol{C}^d$，

$$|f(z)|\leqslant b(1+\|z\|)^N e^{r\|\mathrm{Im}\,z\|},$$

则存在 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数 $\Lambda$，其支集 $\subset rB$，使得 $f=\widetilde{\Lambda}$。

［证］ ① 设 $z\in \boldsymbol{C}^d$，$\alpha\in \boldsymbol{N}^d$，$j\in\{1,\cdots,d\}$，由下式定义 $w_j:\boldsymbol{R}^d\mapsto \boldsymbol{C}$，

$$w_j(x) = -ix_j, \qquad x\in \boldsymbol{R}^d。$$

设 $h$ 是非零复变数，当 $h\to 0$，$\forall x\in \boldsymbol{R}^d$，

$$\frac{(D^\alpha e_{-(z+he_j)})(x)-(D^\alpha e_{-z})(x)}{h}\to\left(\frac{\partial}{\partial z_j}D^\alpha e_{-z}\right)(x)$$

$$=\left(D^\alpha\frac{\partial}{\partial z_j}e_{-z}\right)(x)=(D^\alpha(w_je_{-z}))(x),$$

这里 $$D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d},$$

这样 $$\frac{D^\alpha e_{-(z+he_j)}-D^\alpha e_{-z}}{h}\to D^\alpha(w_je_{-z}),$$

当 $h\to 0$，在 $\boldsymbol{R}^d$ 上点点收敛意义下成立。

在 $\boldsymbol{R}^d$ 的任一紧子集上，这收敛是一致的，故在 $C^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ 中，

$$\frac{e_{-(z+he_j)}-e_{-z}}{h}\to w_je_{-z}，当 h\to 0，$$

所以 $$\frac{\Lambda(e_{-(z+he_j)})-\Lambda(e_{-z})}{h}\to\Lambda(w_je_{-z})=(w_j\Lambda)(e_{-z}),$$

当 $h\to 0$，

即 $$\frac{\widetilde{\Lambda}(z+he_j)-\widetilde{\Lambda}(z)}{h}\to\widetilde{w_j\Lambda}(z)，当 h\to 0。$$

所以 $\widetilde{\Lambda}$ 是整函数，且 $\dfrac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial z_j}=\widetilde{w_j\Lambda}$。

此公式类似于定理 14.4 ①。

由定理 10.8 ①，存在正数 $M$，非负整数 $N$ 和紧集 $L\supset\operatorname{supp}\Lambda$，使 $\forall\varphi\in D$，

$$|\Lambda(\varphi)|\leqslant Mp_{N,L}(\varphi)=M\max_{|\alpha|\leqslant N}\sup_{x\in\operatorname{supp}\Lambda}|D^\alpha\varphi(x)|。$$

取 $g\in C^\infty(R)$，使满足 $0\leqslant g\leqslant 1$，且

$$g = \begin{cases} 1 & 在(-\infty, 1]上, \\ 0 & 在[2, \infty)上。\end{cases}$$

$\forall z \in C^d$，定义 $\psi_z \in C^\infty(R^d)$ 如下：

$$\psi_z(x) = g((\|x\| - r)\|z\|), \quad x \in \boldsymbol{R}^d,$$

则 $\psi_z \in D(R^d)$，且

如 $x \in \operatorname{supp} \psi_z$，则 $\|x\| \leqslant r + 2/\|z\|$，因而

$$|e_{-z}(x)| = e^{\operatorname{Im} z \cdot x} \leqslant e^{\|\operatorname{Im} z\| \cdot \|x\|} \leqslant e^{\|\operatorname{Im} z\|(r + 2/\|z\|)}$$
$$\leqslant e^{2 + r\|\operatorname{Im} z\|}。$$

由此推出

$$|\Lambda(e_{-z}\psi_z)| \leqslant M \max_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \operatorname{supp} \psi_z} |(D^\alpha(e_{-z}\psi_z))(x)|$$
$$\leqslant b(1 + \|z\|)^N e^{r\|\operatorname{Im} z\|},$$

以上最后一个不等式是用 Leibniz 公式计算得出，$b$ 是与 $r$ 有关与 $z$ 无关的常数。

另一方面，因在 $\{x \in \boldsymbol{R}^d : \|x\| \leqslant r + 1/\|z\|\}$ 上，$\psi_z = 1$，$\operatorname{supp} \psi_z \supset (r + 1/\|z\|)B \supset rB \supset \operatorname{supp} \Lambda$，由引理 10.7 ③，$\forall z \in C^d$，

$$\Lambda(e_{-z}\psi_z) = (\psi_z \Lambda)(e_{-z}) = \Lambda(e_{-z}) = \widetilde{\Lambda}(z),$$

所以 $$|\widetilde{\Lambda}(z)| \leqslant b(1 + \|z\|)^N e^{r\|\operatorname{Im} z\|}。$$

② 由假设，$\forall x \in \boldsymbol{R}^d$，$|f(x)| \leqslant b(1 + \|x\|)^N$，故由定理 17.3，$\Lambda_{(f|R^d)}$ 是缓增广义函数。

令 $$\lambda = (\check{\Lambda}_{(f|R^d)})^\wedge \tag{13.5.1}$$

则 $\lambda \in S'$，以下证明 $\lambda$ 有紧支集。

取固定的 $h \in D_B(R^d)$（$B$ 表示闭单位球）使 $\int h\, dm = 1$，$\forall \varepsilon > 0$，由下式定义 $h_\varepsilon \in D_{\varepsilon B}(R^d)$：

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} h(x/\varepsilon), \quad x \in \boldsymbol{R}^d,$$

由引理 14.2 ⑦，$\forall t \in \boldsymbol{R}^d$，

$$\left.\begin{aligned} &\hat{h}_\varepsilon(t) = \hat{h}(\varepsilon t) \to \hat{h}(0) = 1, \quad 当\ \varepsilon \to 0 \\ &且因\ \hat{h}_\varepsilon \in S,\ \hat{h}_\varepsilon\ 在\ \boldsymbol{R}^d\ 有界 \end{aligned}\right\} \tag{18.5.2}$$

由定理 18.2 ②，存在 $r_0, r_1, \cdots$ 使对所有的非负整数 $M$ 和 $z \in C^d$，

$$|\tilde{h}_\varepsilon(z)| \leqslant r_M \frac{e^{\varepsilon \|\mathrm{Im}\, z\|}}{(1+\|z\|)^M},$$

所以
$$|f(z)\tilde{h}_\varepsilon(z)| \leqslant b r_M \frac{e^{(r+\varepsilon)\|\mathrm{Im}\, z\|}}{(1+\|z\|)^{M-N}},$$

由定理 18.2 ③，存在 $\varphi_\varepsilon \in D_{(r+\varepsilon)B}(R^d)$ 使

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = f\tilde{h}_\varepsilon \quad 在 \ C^d \ 上。\tag{18.5.3}$$

设 $\psi \in D$，且 $\operatorname{supp}\psi \cap rB = \phi$ (18.5.4)

由(18.5.1)，(18.5.2)，

$$\lambda(\psi) = (\check{\Lambda}_{(f|_{R^d})})^{\wedge}(\psi) = \int_{R^d} f(\hat{\psi})^{\vee} dm$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^d} f\hat{h}_\varepsilon(\hat{\psi})^{\vee} dm。$$

由(18.5.3)

$$上式 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^d} \hat{\varphi}_\varepsilon(\hat{\psi})^{\vee} dm,$$

由引理 14.2 ⑥ 和定理 14.11 ①，

$$上式 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^d} \varphi_\varepsilon \psi \, dm。$$

因 $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subset (r+\varepsilon)B$，又如 $\varepsilon$ 充分小，由(18.5.4)

$$\operatorname{supp}\psi \cap (r+\varepsilon)B = \phi,$$

所以 $\varphi_\varepsilon \psi = 0$，

因此 $\lambda(\psi) = 0$。

上式对所有满足(18.5.4)的 $\psi \in D$ 均成立，

所以 $\operatorname{supp}\lambda \subset rB$。

所以 $\lambda$ 有紧支集，由定义 18.4，它的 Fourier-Laplace 变换有定义，

$$\tilde{\lambda}(z) = \lambda(e_{-z})$$

记 $g=\widetilde{\lambda}|_{R^d}$，即 $g(x)=\lambda(e_{-x})$，由定理 18.3 ③：

$$\hat{\lambda}=\Lambda_g=\Lambda_{(\widetilde{\lambda}|_{R^d})},$$

而由(18.5.1)，

$$\hat{\lambda}=(\Lambda_{(f|_{R^d})})^{\vee\wedge\wedge}=\Lambda_{(f|_{R^d})}，\text{(由 § 17.9 反演定理)}$$

所以 $\widetilde{\lambda}|_{R^d}=f|_{R^d}$，a.e.。

但 $\widetilde{\lambda}$ 和 $f$ 都是整函数，所以 $\widetilde{\lambda}=f$ 在 $C^d$ 上。

§ 18.6 **引理** 设 $\Lambda$ 是 $R^d$ 上有紧支集的广义函数，

① 如在 $R^d$ 上 $\widetilde{\Lambda}=0$，则 $\Lambda=0$。

② 设 $\alpha$ 是 $d$ 重整数，则 $\forall z\in C^d$，

$$((-iD)^\alpha\Lambda)(e_{-z})=z^\alpha\Lambda(e_{-z})。$$

③ 设 $P$ 是 $C^d$ 上多项式，则

$$(P(-iD)\Lambda)^\sim=P\widetilde{\Lambda}。$$

［证］ ① 由定义 18.4 和定理 18.3 ③，令 $g=\widetilde{\lambda}|_{R^d}$，则 $\hat{\Lambda}=\Lambda_g=0$，由定理 17.7 ④，

$$\Lambda=\Lambda^{\wedge\wedge\wedge\wedge}=0。$$

② $((-iD)^\alpha\Lambda)(e_{-z})=(-i)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha e_{-z})$

$$=(i)^{|\alpha|}\Lambda((-iz)^\alpha e_{-z})=z^\alpha\Lambda(e_{-z})。$$

③ $\forall z\in C^d$，

$$(P(-iD)\Lambda)^\sim(z)=(P(-iD)\Lambda)(e_{-z})=P(z)\Lambda(e_{-z})$$

$$=P(z)\widetilde{\Lambda}(z)=(P\widetilde{\Lambda})(z),$$

所以 $(P(-iD)\Lambda)^\sim=\widetilde{P}\Lambda$。

# 第四章　对微分方程的应用

## 第十九节　基本解存在定理

在本节中，$C^d$ 上多项式 $P$ 是以下形式：

$$P(z)=\sum_{|\alpha|\leq N} c_\alpha z^\alpha=\sum_{|\alpha|\leq N} c_{\alpha_1,\cdots,\alpha_d} z_1^{\alpha_1}\cdots z_d^{\alpha_d},$$

$$z=(z_1,\cdots,z_d)\in C^d。$$

记
$$T^d=\{w=(w_1,\cdots,w_d):w_1,\cdots,w_d\in C,$$
$$|w_1|=\cdots=|w_d|=1\}。$$

$T^d$ 中点 $w$ 也可表成 $w=(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_d})$，其中 $\theta_1,\cdots,\theta_d\in R$。

$\sigma^d$ 是 $T^d$ 上的 Haar 测度，即等于 Lebesque 测度除以 $(2\pi)^d$，所以 $\sigma^d(T^d)=1$。

§19.1　**引理**

① 设 $P$ 是 $C^d$ 上多项式，则对任一个 $C^d$ 上的整函数 $f$，

$$|f(0)|\int_{T^d}\Big|\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\Big|d\sigma^d(w)\leqslant\int_{T^d}|Pf|d\sigma^d。$$

② 设存在 $\alpha$，$|\alpha|=N$，$c_\alpha\neq 0$（即 $P$ 是 $N$ 次多项式），则

$$\int_{T^d}\Big|\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\Big|d\sigma^d(w)>0。$$

③ 在②的假设下，如

$$A=\frac{1}{\int_{T^d}\left|\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\right|d\sigma^d(w)}>0,$$

则对所有的整函数 $f:C^d\mapsto C$，$\forall z\in C^d$，$\forall r>0$，

$$|f(z)|\leqslant\frac{A}{r^N}\int_{T^d}|(Pf)(z+rw)|d\sigma^d(w)。$$

④ 在②的假设下，如 $f$ 是 $\boldsymbol{C}^d$ 上整函数，在 $\boldsymbol{C}^d$ 上 $Pf=0$，则在 $\boldsymbol{C}^d$ 上 $f=0$。

**［证］** ① 对所有的 $w\in\boldsymbol{C}^d$，由下式定义 $\boldsymbol{C}$ 上的多项式：

$$Q_w(\lambda)=\sum_{M=0}^{N}\overline{\left(\sum_{|\alpha|=M}c_\alpha w^\alpha\right)}\lambda^{N-M},\ \lambda\in\boldsymbol{C},$$

如 $|\lambda|=1$，即 $\lambda\in T^1$，则

$$\begin{aligned}|Q_w(\lambda)|&=\left|\sum_{M=0}^{N}\overline{\left(\sum_{|\alpha|=M}c_\alpha w^\alpha\right)\lambda^{N-M}}\right|\\&=\left|\sum_{M=0}^{N}\left(\sum_{|\alpha|=M}c_\alpha w^\alpha\right)\lambda^{M-N}\right|\\&=\left|\sum_{M=0}^{N}\left(\sum_{|\alpha|=M}c_\alpha w^\alpha\lambda^M\right)\right|\\&=|P(w\lambda)|。\end{aligned}$$

由 Cauchy 积分公式，

$$\begin{aligned}|f(0)Q_w(0)|&\leqslant\int_{T^1}|f(w\lambda)Q_w(\lambda)|d\sigma^1(\lambda)\\&=\int_{T^1}|(Pf)(w\lambda)|d\sigma^1(\lambda)。\end{aligned}$$

即
$$|f(0)|\left|\sum_{|\alpha|=N}c_\alpha w^\alpha\right|\leqslant\int_{T^1}|(Pf)(w\lambda)|d\sigma^1(\lambda)。$$

对 $w$ 在 $T^d$ 上积分，用 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}&|f(0)|\int_{T^d}\left|\sum_{|\alpha|=N}c_\alpha w^\alpha\right|d\sigma^d(w)\\&\leqslant\int_{T^1}d\sigma^1(\lambda)\int_{T^d}|(Pf)(w\lambda)|d\sigma^d(w),\end{aligned}$$

因当 $\lambda\in T^1$，

$$\int_{T^d}|(Pf)(w\lambda)|d\sigma^d(w)=\int_{T^d}|(Pf)(w)|d\sigma^d(w),$$

$$\int_{T^1}d\sigma^1(\lambda)=1,$$

所以
$$|f(0)|\int_{T^d}\left|\sum_{|\alpha|=N}c_\alpha w^\alpha\right|d\sigma^d(w)\leqslant\int_{T^d}|Pf|d\sigma^d。$$

② $\int_{T^d}\left|\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\right|^2 d\sigma^d(w)$

$$=\int_{T^d}\Big(\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\Big)\Big(\sum_{|\beta|=N} \bar{c}_\beta \bar{w}^\beta\Big)d\sigma^d(w)$$

$$=\sum_{|\alpha|=N,\ |\beta|=N} c_\alpha\bar{c}_\beta\int_{T^d} w^\alpha\cdot\bar{w}^\beta d\sigma^d(w)$$

$$=\sum_{|\alpha|=N,\ |\beta|=N}\frac{c_\alpha\bar{c}_\beta}{(2\pi)^d}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{i\alpha_1\theta_1}\cdots e^{i\alpha_d\theta_d}\cdot e^{-i\beta_1\theta_1}$$

$$\cdots e^{-i\beta_d\theta_d}d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_d=\sum_{|\alpha|=N}|c_\alpha|^2>0,$$

所以 $$\int_{T^d}\left|\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha w^\alpha\right|d\sigma^d(w)>0。$$

③ 由①、②用变量替换推出。

④ 由③推出。

§19.2 **定理** 设 $P$ 是 $\boldsymbol{C}^d$ 上非平凡多项式（非零次多项式），且 $\Sigma$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上有紧支集的广义函数。

① 如存在 $\boldsymbol{R}^d$ 上有紧支集的广义函数 $\Lambda$ 满足 $P(-iD)\Lambda=\Sigma$，则有 $\boldsymbol{C}^d$ 上整函数 $f$，满足 $Pf=\widetilde{\Sigma}$。

② 如存在 $\boldsymbol{C}^d$ 上整函数 $f$ 满足 $Pf=\widetilde{\Sigma}$，则存在唯一 $\boldsymbol{R}^d$ 上有紧支集的广义函数 $\Lambda$ 满足 $P(-iD)\Lambda=\Sigma$，且有 $\operatorname{supp}\Lambda\subset\overline{\operatorname{Co}}\operatorname{supp}\Sigma$（$\operatorname{supp}\Sigma$ 的闭凸包）。

［证］ ① 由引理 18.6 ③，

$$P\widetilde{\Lambda}=(P(-iD)\Lambda)^\sim=\widetilde{\Sigma},$$

由定理 18.5 ①，$\widetilde{\Lambda}=f$ 是整函数。

② 设多项式 $P$ 的次数为 $N$，如在引理 19.1 ③中，取正数 $A$，则 $\forall z\in\boldsymbol{C}^d$，

$$|f(z)|\leqslant A\int_{T^d}|\widetilde{\Sigma}(z+w)|d\sigma^d(w) \tag{19.2.1}$$

取 $r>0$ 使 $rB\supset\operatorname{supp}\Sigma$，由定理 18.5 ①，存在常数 $b$，非负整数 $M$，

$$|\widetilde{\Sigma}(z)| \leqslant b(1+\|z\|)^M e^{r\|\mathrm{Im} z\|};$$

代入(19.2.1)式，

$$|f(z)| \leqslant A\int_{T^d} b(1+\|z+w\|)^M e^{r\|\mathrm{Im}(z+w)\|} d\sigma^d(w)$$

$$\leqslant A\int_{T^d} b(1+\|z\|+\|w\|)^M e^{r\|\mathrm{Im} z\|}\cdot e^{r\|\mathrm{Im} w\|} d\sigma^d(w)$$

$$\leqslant A\int_{T^d} b(1+\sqrt{d}+\|z\|)^M e^{r\|\mathrm{Im} z\|} e^{r\sqrt{d}} d\sigma^d(w)$$

$$\leqslant A e^{r\sqrt{d}} b(1+\sqrt{d})^M (1+\|z\|)^M e^{r\|\mathrm{Im} z\|}。$$

由定理 18.5 ②，存在 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数 $\Lambda$，使得

$$\mathrm{supp}\Lambda \subset r\boldsymbol{B} \tag{19.2.2}$$

且 $$\forall z\in \boldsymbol{C}^d,\ \widetilde{\Lambda}(z)=f(z)。$$

所以 $$P\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Sigma}。$$

由引理 18.6③，$(P(-iD)\Lambda)^{\sim}=P\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Sigma}$，

由引理 18.6①，$P(-iD)\Lambda=\Sigma$。

用与引理 19.1 ④相类似的论证，可证得 $\Lambda$ 的唯一性。

设 $x\in\boldsymbol{R}^d$，且 $\mathrm{supp}\,\Sigma\subset\overline{B}(x,r)$，容易看出

$$P(-iD)(\tau_{-x}\Lambda)=\tau_{-x}\Sigma,$$

$$\mathrm{supp}(\tau_{-x}\Sigma)=\mathrm{supp}\,\Sigma-x\subset\overline{B}(0,r),$$

且有 $$(P(-iD)(\tau_{-x}\Lambda))^{\sim}=(\tau_{-x}\Sigma)^{\sim},$$

所以 $$P(\tau_{-x}\Lambda)^{\sim}=(P(-iD)\tau_{-x}\Lambda)^{\sim}=(\tau_{-x}\Sigma)^{\sim}。$$

令 $f_1=(\tau_{-x}\Lambda)^{\sim}$，则 $f_1$ 是 $\boldsymbol{C}^d$ 上整函数。令 $\tau_{-x}\Sigma=\Sigma_1$，则 $Pf_1=\widetilde{\Sigma}_1$，$\Sigma_1$ 是有紧支集的广义函数，且 $rB\supset\mathrm{supp}\,\Sigma_1$，而 $\tau_{-x}\Lambda=\Lambda_1$ 满足

$$P(-iD)\Lambda_1=\Sigma_1,$$

且是满足此式的唯一的 $\boldsymbol{C}^d$ 上有紧支集的广义函数。因此由前面已证明的(19.2.2)，

$$\mathrm{supp}\,\tau_{-x}\Lambda=\mathrm{supp}\,\Lambda_1\subset rB,$$

即 $$\operatorname{supp}\Lambda - x\subset\overline{B}(0,r),$$
所以 $$\operatorname{supp}\Lambda\subset\overline{B}(x,r),$$
因此 $$\operatorname{supp}\Lambda\subset\bigcap\{\overline{B}(x,r):\overline{B}(x,r)\supset\operatorname{supp}\Sigma\}$$
$$=\overline{\mathrm{Co}}(\operatorname{supp}\Sigma)。$$

证毕。

§ 19.3 引理

① 对所有的正实数 $s$，$\forall\psi\in D_{sB}(R^d)$，$\forall z\in C^d$，

$$|\widetilde{\psi}(z)|\leqslant 2^d(d+1)^d\max_{|\alpha|<2d}\|D^\alpha\psi\|_1\frac{e^{s\|\mathrm{Im}z\|}}{(1+\|z\|)^{2d}}。$$

② 对所有的正数 $r,s$，对所有的正整数 $d$，存在正常数 $c$，使 $\forall\psi\in D_{sB}(R^d)$，

$$\iint_{T^d\times R^d}|\widetilde{\psi}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)\leqslant c\max_{|\alpha|<2d}\|D^\alpha\psi\|_1。$$

③ 设 $P,N,A$ 如引理 19.1 ③所取，$\varphi\in D(R^d)$，$P(iD)\varphi=\psi$，则对所有的 $r>0$，

$$|\varphi(0)|\leqslant\frac{A}{r^N}\iint_{T^d\times R^d}|\widetilde{\psi}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)。$$

〔证〕 ① 直接由定理 18.2 ①推出，取 $N=2d$。

② 由①推出，因为

$$\iint_{T^d\times R^d}\frac{e^{s\|\mathrm{Im}(t+rw)\|}}{(1+\|t+rw\|)^{2d}}d\sigma^d(w)dm(t)$$
$$\leqslant e^{sr\sqrt{d}}\int_{R^d}\max_{w\in T^d}\frac{1}{(1+\|t+rw\|)^{2d}}dm(t)$$
$$\leqslant e^{sr\sqrt{d}}\left[\int_{\|t\|<r\sqrt{d}}dm(t)\right.$$
$$\left.+\int_{\|t\|>r\sqrt{d}}\frac{1}{(1+\|t\|-r\sqrt{d})^{2d}}dm(t)\right]$$
$$<\infty。$$

③ 用引理 14.2 ⑨，推广到复数的情况，

$$P(\check{\varphi})^{\sim}=(P(-iD)\check{\varphi})^{\sim}=(\check{\psi})^{\sim},$$

因此，由引理 19.1 ③，$\forall t\in \boldsymbol{R}^d$，$\forall r>0$，

$$|(\check{\varphi}(t))^{\sim}|\leqslant\frac{A}{r^N}\int_{T^d}(\check{\psi})^{\sim}(t+rw)d\sigma^d(w)。$$

由定理 14.9，

$$|\varphi(0)|=\left|\int\hat{\varphi}dm\right|\leqslant\int|\hat{\varphi}|\ dm=\int|(\check{\varphi})^{\wedge}|dm$$

$$\leqslant\frac{A}{r^N}\int_{R^d}\int_{T^d}|(\check{\psi})^{\sim}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)$$

$$=\frac{A}{r^N}\int_{R^d}\int_{T^d}|(\widetilde{\psi})^{\vee}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)$$

$$=\frac{A}{r^N}\int_{R^d}\int_{T^d}|\widetilde{\psi}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)。$$

§ 19.4 **定义** 广义函数 $\Lambda\in D'(R^d)$ 称为常系数线性偏微分算子 $P(D)$ 的一个**基本解**，如果 $\Lambda$ 满足方程

$$P(D)\Lambda=\delta_0。$$

§ 19.5 **基本解存在定理** (Malgrange- Ehrenpreis) 存在阶数≤2 $d$ 的广义函数 $\Lambda\in D'(R^d)$ 满足方程

$$P(-iD)\Lambda=\delta_0,$$

即任一常系数线性偏微分算子存在基本解 $\Lambda$。此外，对所有的 $\psi\in D(R^d)$，$r>0$，有

$$|\Lambda(\psi)|\leqslant\frac{A}{r^N}\iint\limits_{T^d\times R^d}|\widetilde{\psi}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)\qquad(19.5.1)$$

［证］ 令 $E=\{P(iD)\varphi:\varphi\in D\}\subset D$，由引理 19.3 ③，映射

$$\Sigma:\psi=P(iD)\varphi\mapsto\varphi(0).$$

是有定义的，$\Sigma(\psi)$ 由 $\psi\in E$ 唯一确定，不依赖于 $\varphi$ 的选取，$\Sigma$ 是定义在 $E$ 上的线性泛函。且 $\forall\psi\in E$，

$$|\Sigma(\psi)|\leqslant\frac{A}{r^N}\iint\limits_{T^d\times R^d}|\widetilde{\psi}(t+rw)|d\sigma^d(w)dm(t)=p(\psi)。$$

上式右端是 $D$ 上的半范，由 Hahn-Banach 定理，存在 $D$ 上线性泛函 $\Lambda$ 满足(19.5.1)，$\Lambda|_E=\Sigma$。由引理 19.3 ②，$\Lambda$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数，阶数 $\leqslant 2d$，这样，$\forall\varphi\in D$，

$$\delta_0(\varphi)=\varphi(0)=\Sigma(P(iD)\varphi)=\Lambda(P(iD)\varphi)$$
$$=(P(-iD)\Lambda)(\varphi),$$

所以
$$P(-iD)\Lambda=\delta_0。$$

§ 19.6 **注**

① 定理 19.5 中的基本解 $\Lambda$ 不可能有紧支集。如 $\Lambda$ 有紧支集，由定理 19.2 ①，存在 $\boldsymbol{C}^d$ 上整函数 $f$，使 $Pf=\widetilde{\delta_0}=1$ 。用引理 19.1 ③，

$$|f(z)|\leqslant\frac{A}{r^N}\int_{T^d}1d\sigma=\frac{A}{r^N},$$

令 $r\to\infty$，$f(z)=0$，$Pf=0$，得出矛盾。

② 设 $\Sigma$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上有紧支集的广义函数，$\Lambda$ 是定理 19.5 给出的基本解。令 $\Pi=\Lambda*\Sigma$，则由定理 13.20 ③，

$$P(-iD)\Pi=P(-iD)(\Lambda*\Sigma)=(P(-iD)\Lambda)*\Sigma$$
$$=\delta_0*\Sigma=\Sigma,$$

即常系数(复系数)线性偏微分方程

$$P(-iD)\Pi=\Sigma$$

当 $\Sigma$ 有紧支集时一定有广义函数解。如 $f$ 是有紧支集的可积函数，则偏微分方程

$$P(-iD)u=f$$

有广义函数解。

③ 如 $\lambda\in D'$，$\varphi\in D$，则

$$\Lambda_{\lambda*\varphi}=\lambda*\Lambda_\varphi\in D',$$

且
$$\lambda*\varphi\in C^\infty,$$

因此，如 $\varphi\in D$，则存在 $f\in C^\infty$，使

$$P(-iD)f=\varphi,$$

即以上方程有无穷次可微的普通函数解（古典解）$f$。

④ 设 $g=\frac{1}{P}\Big|_{R^d}$，且 $\Lambda_g\in S'$，则存在 $\lambda\in S'$，使

$$P(-iD)\lambda=\delta_0。$$

［证］ 取 $\lambda=(\check{\Lambda}_g)\hat{}$，则 $\lambda\in S'$，

$$(P(-iD)\lambda)\hat{}=P\check{\Lambda}_g\hat{}\hat{}=P\Lambda_g=1,$$

$$(P(-iD)\lambda)\hat{}\hat{}\check{}=(\hat{1})\check{}=\delta_0,$$

所以

$$P(-iD)\lambda=\delta_0。$$

## 第二十节 索波列夫空间

由定理 18.5 ④得出，如 $\lambda\in D'$ 有紧支集，则存在常数 $b$，非负整数 $N$ 和 $\boldsymbol{R}^d$ 上 $C^\infty$ 函数 $\widetilde{\lambda}$，满足

$$\forall x\in\boldsymbol{R}^d,\ |\widetilde{\lambda}(x)|\leqslant b(1+\|x\|)^N,$$

且由定理 18.3 ③，$\hat{\lambda}=\Lambda_{\widetilde{\lambda}}$。

如 $s<-N-d/2$，则

$$\int|\widetilde{\lambda}(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)\leqslant b^2\int(1+\|x\|)^{2N}(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$\leqslant 2^N b^2\int(1+\|x\|^2)^{N+s}dm(x)<\infty,$$

由此导出以下的定义：

§ 20.1 **定义** 设 $s\in\boldsymbol{R}$，定义**索波列夫空间** $H^s$ 如下：

$H^s=\{\lambda\in S'$：$\exists\boldsymbol{R}^d$ 上可测函数 $f$ 使得

$$\int|f(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)<\infty,\ 且\ \hat{\lambda}=\Lambda_f\}。$$

由于 $f$ 被 $\lambda$ 所确定(a.e.)，记

$$f=F\lambda,(F\ 表示\ \text{Fourier}\ 变换),$$

则 $\hat{\lambda}=\Lambda_{F\lambda}$。事实上，

$$\lambda=(\Lambda_{F\lambda})^{\vee\wedge} \tag{20.1.1}$$

$H^s$ 按以下定义的范数

$$\|\lambda\|_s=\left[\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)\right]^{1/2},\quad (\lambda\in H^s)$$

成为 Banach 空间。

由定义 17.6 和 Plancherel 定理，映射

$$g\mapsto\Lambda_g$$

是 $L^2$ 到 $H^0$ 上的等距线性同构。由这定义前的说明，如 $\lambda\in D'$ 有紧支集，则有非负整数 $N$，对所有满足 $s<-N-d/2$ 的 $s$，$\lambda\in H^s$。

显然，如 $t<s$，则 $H^s\subset H^t$，且包含映射 $I: H^s\mapsto H^t$ 是连续的。

§20.2 **定义** 记 $H^{-\infty}=\bigcup\limits_{s\in R}H^s$，则 $H^{-\infty}$ 是线性空间，定义 $H^{-\infty}$ 的拓扑为子空间族 $\{H^s : s\in R\}$ 的归纳限局部凸拓扑。这里 Banach 空间 $H^s$ 上的半范基即 $\{n\|\cdot\|_s : n\in\mathcal{N}\}$。这样 $H^{-\infty}$ 成为局部凸空间。

显然，$(C^\infty)'\subset H^{-\infty}\subset S'$。

设线性算子 $T: H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}, t\in\boldsymbol{R}$，如果对所有的 $s\in\boldsymbol{R}$，$T$ 把 $H^s$ 连续地映入 $H^{s-t}$，则称 $T$ 有阶数 $t$。

定义 $W_t : \boldsymbol{R}^d\mapsto\boldsymbol{R}$ 如下：

$$W_t(x)=(1+\|x\|^2)^{t/2}, x\in\boldsymbol{R}^d。$$

§20.3 **定理**

① 如 $s,t\in\boldsymbol{R}$，由下式定义映射 $T: H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$：

$$T(\lambda)=\Sigma \text{ 当且仅当 } F\Sigma=W_tF\lambda,$$

则 $T$ 是 $H^s$ 到 $H^{s-t}$ 上的等距线性同构。

由 $T$ 的定义，$T$ 的表达式是：

$$T(\lambda)=(\Lambda_{(W_tF\lambda)})^{\vee\wedge}, \lambda\in H^{-\infty},$$

因此映射 $T$ 有阶数 $t$，而它的逆映射也存在，有阶数 $-t$。

② 如 $b\in L^\infty(R^d)$，则由下式定义 $T_b$：

$T_b(\lambda)=\Sigma$ 当且仅当 $F\Sigma=bF\lambda$，

$T_b$ 是 $H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 的映射，有阶数 0。

③ 如 $\alpha\in N^d$，则 $D^\alpha$ 是 $H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 的映射，有阶数 $|\alpha|$。

④ 如 $f\in S$，则映射 $\lambda\mapsto f\lambda$ 是 $H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 的 0 阶映射。

[证] ① $\forall\lambda\in H^s$，

$$\|\lambda\|_s^2=\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)<\infty,$$

$$\|T(\lambda)\|_{s-t}^2=\int|W_t(x)(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-t}dm(x)$$

$$=\int|(1+\|x\|^2)^{t/2}(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-t}dm(x)$$

$$=\|\lambda\|_s^2。$$

② $T_b(\lambda)=(\Lambda_{bF\lambda})^{\check{}}$，$(T_b(\lambda))^\wedge=\Lambda_{bF\lambda}$，

$$\forall\lambda\in H^s,\quad \int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)<\infty,$$

由此推出 $$\int|b(x)(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)<\infty,$$

所以 $\Lambda_{bF\lambda}\in S'$，且 $\|T_b(\lambda)\|_s\leqslant\|b\|_\infty\|\lambda\|_s$，

因此 $T_b$ 是 $H^s\mapsto H^s$ 的连续线性算子。

③ 令多项式 $P$ 为 $P(x)=x^\alpha, x\in\boldsymbol{R}^d$，

由定理 17.7 ⑤，$\forall\lambda\in S'$，

$$(D^\alpha\lambda)^\wedge=(i)^{|\alpha|}P\hat{\lambda},$$

特别的如 $\lambda\in H^s$，则

$$(D^\alpha\lambda)^\wedge=(i)^{|\alpha|}P\Lambda_{F\lambda}=(i)^{|\alpha|}\Lambda_{PF\lambda},$$

$$\int|(P\cdot F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-|\alpha|}dm(x)$$

$$\leqslant\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)<\infty,$$

所以 $D^\alpha\lambda\in H^{s-|\alpha|}$，且 $\|D^\alpha\lambda\|_{s-|\alpha|}\leqslant\|\lambda\|_s$，

因此 $D^\alpha$ 是 $H^s\mapsto H^{s-|\alpha|}$ 连续的，所以 $D^\alpha$ 有阶数 $|\alpha|$。

④ 由 Cauchy-Schwarz 不等式，$\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，$\forall y\in\boldsymbol{R}^d$，

$$\|x+y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2\leqslant2(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

所以

$$1+\|x+y\|^2\leqslant2(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2) \tag{20.3.1}$$

把 $x$ 换成 $x+y$，把 $y$ 换成 $-y$，得

$$1+\|x\|^2\leqslant2(1+\|x+y\|^2)(1+\|y\|^2),$$

即

$$(1+\|x+y\|^2)^{-1}\leqslant2(1+\|x\|^2)^{-1}(1+\|y\|^2) \tag{20.3.2}$$

由(20.3.1)和(20.3.2)，对 $\varepsilon=\pm1$，

$$(1+\|x+y\|^2)^\varepsilon\leqslant2(1+\|x\|^2)^\varepsilon(1+\|y\|^2) \tag{20.3.3}$$

所以 $\forall s\in\boldsymbol{R}$，$\forall x,y\in\boldsymbol{R}^d$，有

$$(1+\|x+y\|^2)^s\leqslant2^{|s|}(1+\|x\|^2)^s(1+\|y\|^2)^{|s|} \tag{20.3.4}$$

此即是 Peetre 不等式。

设 $s\in\boldsymbol{R}$，固定 $t>|s|+d/2$，设 $\lambda\in H^s$，则 $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$|(F\lambda*\hat{f})(x)|\leqslant\int|(F\lambda)(x-y)||\hat{f}(y)|dm(y)$$

$$=\int|(F\lambda)(x-y)|(1+\|y\|^2)^{-t/2}|\hat{f}(y)|(1+\|y\|^2)^{t/2}dm(y)。$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|(F\lambda*\hat{f})(x)|^2\leqslant\int|(F\lambda)(x-y)|^2$$

$$\times(1+\|y\|^2)^{-t}dm(y)\cdot\int|\hat{f}(y)|^2(1+\|y\|^2)^t dm(y),$$

因 $f\in S$，$\int|\hat{f}(y)|^2(1+\|y\|^2)^t dm(y)=A<\infty$，

$A$ 依赖于 $f$。故 $\forall x\in\boldsymbol{R}^d$，

$$|(F\lambda*\hat{f})(x)|^2\leqslant A\int|(F\lambda)(x-y)|^2(1+\|y\|^2)^{-t}dm(y),$$

$$\int|(F\lambda*\hat{f})(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$\leqslant A\int\left[\int|(F\lambda)(x-y)(1+\|x\|^2)^s(1+\|y\|^2)^{-t}dm(x)\right]dm(y)$$

$$=A\int\left[\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x+y\|^2)^s(1+\|y\|^2)^{-t}dm(x)\right]dm(y)。$$

由 Peetre 不等式(20.3.4),

$$\int|(F\lambda*\hat{f})(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$\leqslant 2^{|s|}A\iint|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s(1+\|y\|^2)^{|s|-t}dm(x)dm(y),$$

现在 $\int(1+\|y\|^2)^{|s|-t}dm(y)<\infty$,

所以存在常数 $B$,依赖于 $f,s$ 和 $t$,使

$$\int|(F\lambda)*\hat{f})(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$\leqslant B\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$=B\|\lambda\|_s^2<\infty,$$

由(20.1.1),(下面把 $\hat{f}$ 简记成 $Ff$)

$$(\check{\Lambda}_{F\lambda*Ff})^\wedge\in H^s \tag{20.3.5}$$

由(20.1.1)及定理 15.14①,

$$\hat{\lambda}*\hat{f}=\Lambda_{F\lambda}*\hat{f}=F\lambda*\hat{f},$$

由定理 17.14⑫,

$$(f\lambda)^\wedge=\Lambda_{\hat{\lambda}*Ff}=\Lambda_{F\lambda*Ff}。$$

由(20.3.5),$f\lambda=(f\lambda)^{\wedge\vee\wedge}=(\Lambda_{F\lambda*Ff})^{\vee\wedge}\in H^s$,

$$\|f\lambda\|_s^2\leqslant B\|\lambda\|_s^2,$$

这证明了映射 $\lambda\mapsto f\lambda$ 是 $H^s\mapsto H^s$ 的连续映射，且是 $H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 的 0 阶映射。

§ 20.4 **引理** 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中的非空开子集，$\Lambda\in D'(\Omega)$。$s\in\boldsymbol{R}$，则以下的 $(a)$、$(b)$ 等价。

$(a)$ $\forall x\in\Omega$，$\exists$ 开子集 $W\subset\Omega$，$\exists\Pi\in H^s$，使 $x\in W$，且 $\varphi\in D(R^d)$，$\operatorname{supp}\varphi\subset W\Rightarrow\Pi(\varphi)=\Lambda(\varphi|_\Omega)$。

（以上性质称为"在 $W$ 上 $\Pi=\Lambda$"）

$(b)$ $\forall\psi\in D(\Omega)$，由下式

$$\varphi\to\Lambda(\psi(\varphi|_\Omega)),\quad \varphi\in D(R^d),$$

定义的 $\boldsymbol{R}^d$ 上广义函数（记成 $\psi\Lambda$）是在 $H^s$ 中的。

［证］ $(a)\Rightarrow(b)$ 设 $\psi\in D(\Omega)$，记 $K=\operatorname{supp}\psi\subset\Omega$，$\forall x\in K$，取开集 $W_x$ 和 $\Pi_x\in H^s$，使

$$x\in W_x\subset\Omega，且在 W_x 上 \Pi_x=\Lambda,$$

由 $K$ 的紧性，存在 $x_1,\cdots,x_n\in K$，使

$$K\subset W_{x_1}\cup\cdots\cup W_{x_n},$$

由单位分解定理的系 8.6，取 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in D(\Omega)$，使

$$\operatorname{supp}\varphi_i\subset W_{x_i},1\leqslant i\leqslant n，且在 K 的开邻域上 \sum_{i=1}^n\varphi_i=1。$$

记 $\psi_i=\psi\varphi_i\in D(\Omega)$，则

$$\operatorname{supp}\psi_i\subset W_{x_i}，且 \sum_{i=1}^n\psi_i=\psi,$$

定义

$$\rho_i=\begin{cases}\psi_i & 在 \Omega 上,\\ 0 & 在 \Omega 外,\end{cases}$$

则 $\rho_i\in D(R^d)$，$\rho_i|_\Omega=\psi_i$，且

$$\operatorname{supp}\rho_i\subset W_{x_i},$$

由定义，$\forall\varphi\in D(R^d)$，

$$(\psi\Lambda)(\varphi)=\Lambda(\psi(\varphi|_\Omega))=\sum_{i=1}^n\Lambda(\psi_i(\varphi|_\Omega))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\Lambda((\rho_i\varphi)|_\Omega)。$$

因 $\operatorname{supp}\rho_i\varphi\subset W_{x_i}$,

$$上式=\sum_{i=1}^{n}\Pi_{x_i}(\rho_i\varphi)=\sum_{i=1}^{n}(\rho_i\Pi_{x_i})(\varphi)。$$

这样
$$\psi\Lambda=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\Pi_{x_i},$$

由假设 $\Pi_{x_i}\in H^s$,由定理 20.3 ④,

$$\psi\Lambda\in H^s。$$

已证明了 $(a)\Rightarrow(b)$。

$(b)\Rightarrow(a)$ 设 $x\in\Omega$,取开集 $W$,使 $\overline{W}$ 紧,且 $x\in W\subset\overline{W}\subset\Omega$。

取 $\psi\in D(\Omega)$ 使得在 $\overline{W}$ 上 $\psi=1$。

记 $\Pi=\psi\Lambda$。

由 $(b)$,$\Pi\in H^s$。如 $\varphi\in D(R^d)$,且 $\operatorname{supp}\varphi\subset W$,则

$$\psi\cdot(\varphi|_\Omega)=\varphi|_\Omega\in D(\Omega),$$

所以
$$\Lambda(\psi\cdot(\varphi|_\Omega))=\Lambda(\varphi|_\Omega),$$

即
$$\Pi(\varphi)=\Lambda(\varphi|_\Omega)。$$

证毕。

§ 20.5 **定义** 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的非空开子集,$s\in\boldsymbol{R}$,且 $\Lambda\in D'(\Omega)$,如 $\Lambda$ 满足引理 20.4 的 $(a)$ 或 $(b)$,则称 $\Lambda$ 是局部 $\boldsymbol{H}^s$ 的。

§ 20.6 **引理**

① 设 $\Lambda\in D'(\Omega)$,$\psi\in D(\Omega)$,$j\in\{1,\cdots,d\}$,则按引理 20.4 $(b)$ 的记号,

$$D_i(\psi\Lambda)=(D_i\psi)\Lambda+\psi(D_i\Lambda)。$$

② 设 $\lambda\in D'(\Omega)$ 是局部 $L^2$ 的且 $\psi\in D(\Omega)$,则存在 $\boldsymbol{R}^d$ 上有紧支集的 $L^2$ 函数 $G$ 使得

$$\psi\lambda=\Lambda_G。$$

[证] ① 把定理 9.9 的论证稍作推广即得。

② 存在 $\Omega$ 上局部 $L^2$ 函数 $g$ 使得

$$\lambda = \Lambda_g,$$

则对所有的 $\varphi \in D(R^d)$,

$$(\psi\lambda)(\varphi) = \lambda(\psi \cdot (\varphi|_\Omega)) = \int g\psi \cdot (\varphi|_\Omega) dm$$

$$= \int_\Omega g\psi\varphi dm。$$

定义 $G$ 如下:

$$G = \begin{cases} g\psi & \text{在 } \Omega \text{ 上}, \\ 0 & \text{在 } \Omega \text{ 外}, \end{cases}$$

则 $\psi\lambda = \Lambda_G$。

§20.7 **定理** 设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的非空开子集, $\lambda \in D'(\Omega)$, $s$ 是非负整数,则以下的($a$)、($b$)、($c$)等价:

($a$) $\lambda$ 是局部 $H^s$ 的。

($b$) 如 $|\alpha| \leqslant s$,则 $D^\alpha\lambda$ 是 $\Omega$ 上局部 $L^2$ 的。

($c$) $\forall j \in \{1, \cdots, d\}$, $\forall r \in \{0, 1, \cdots, s\}$, $D_j^r\lambda$ 是在 $\Omega$ 上局部 $L^2$ 的。

[证] ($a$)⇒($b$),设 $|\alpha| \leqslant s$,取 $\Omega$ 的紧子集序列 $\{K_n\}$ 使满足 $\phi \neq \text{int } K_1$, $\forall n, K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, 且 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$。

取 $\psi_n \in D(\Omega)$,使在 $K_n$ 上 $\psi_n = 1$。

(这和定理 15.4 中的构造相同)

记 $\Pi_n = \psi_n\lambda \in D'(R^d)$,

由假设 $\Pi_n \in H^s$,故由定理 20.3 ③,

$$D^\alpha\Pi_n \in H^{s-|\alpha|} \subset H^0 = L^2,$$

故有 $g_n \in L^2(R^d)$ 使

$$D^\alpha\Pi_n = \Lambda_{g_n} \in D'(R^d)。$$

设 $\rho \in D(\Omega)$,且 $\text{supp } \rho \subset \text{int } K_n$。把 $\rho$ 延拓到 $\boldsymbol{R}^d$,此延拓记成 $\varphi$,使在 $\Omega$ 外 $\varphi = 0$,则

$$(D^\alpha\lambda)(\rho) = (-1)^{|\alpha|}\lambda(D^\alpha\rho) = (-1)^{|\alpha|}\lambda(\psi_n D^\alpha\rho)$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\lambda(\psi_n(D^\alpha\varphi)|_\Omega)$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(\psi_n\lambda)(D^\alpha\varphi) = (D^\alpha \Pi_n)(\varphi)$$

$$= \Lambda_{g_n}(\varphi) = \int g_n\varphi dm$$

$$= \int_\Omega g_n\rho dm \qquad (20.7.1)$$

即在 $\operatorname{int} K_n$ 上，$D^\alpha\lambda = \Lambda_{g_n}$。

由此容易推出，如 $n\leqslant m$，则

$$g_n = g_m \text{ a.e. 在 } \operatorname{int} K_n \text{ 上},$$

因而存在 $\Omega$ 上可测函数 $g$，使 $\forall n\in\mathscr{N}$，

$$g = g_n \text{ a.e. 在 } \operatorname{int} K_n \text{ 上}。$$

设任一 $\rho\in D(\Omega)$，取 $n$ 使 $\operatorname{supp}\rho\subset\operatorname{int} K_n$，则由(20.7.1)，

$$(D^\alpha\lambda)(\rho) = \int_\Omega g_n\rho dm = \int_{\operatorname{int}K_n} g_n\rho dm$$

$$= \int_{\operatorname{int}K_n} g\rho dm = \int_\Omega g\rho dm。$$

故 $D^\alpha\lambda = \Lambda_g\in D'(\Omega)$。显然 $g$ 是在 $\Omega$ 上局部 $L^2$ 的。这证明了 $(a)\Rightarrow(b)$。

$(b)\Rightarrow(c)$ 是显然的。

$(c)\Rightarrow(a)$ 设 $\psi\in D(\Omega)$，要证 $\psi\lambda\in H^s$。因 $\lambda$ 是在 $\Omega$ 上局部 $L^2$ 的，由引理 20.6 ②，存在 $G\in L^2(R^d)$，且有紧支集，满足

$$(\psi\lambda)\hat{} = \hat{\Lambda}_G = \Lambda_{FG}, (FG \text{ 即 } \hat{G}) \qquad (20.7.2)$$

(参看定义 17.6)

这里 $$\hat{G}\in L^2(R^d) \qquad (20.7.3)$$

设 $j\in\{1,\cdots, d\}$，由引理 20.6 和 Leibniz 公式，存在 $G_j\in L^2(R^d)$ 有紧支集，满足

$$D_j^s(\psi\lambda) = \Lambda_{G_j}。$$

$R^d$ 上多项式 $P_j(t) = (it_j)^s$ 记作 $P_j$，则由 (20.7.2) 和定理

17.7⑤,

$$\Lambda_{P_jFG}=P_j\Lambda_{FG}=P_j(\psi\lambda)^{\wedge}=(D_j\psi\lambda)^{\wedge}=\hat{\Lambda}_{G_j}=\Lambda_{FG_j},$$

所以 $$P_j\hat{G}=\hat{G}_j\quad \text{a.e.}。$$

特别的有$\int|\hat{G}(t)|^2|t_j|^{2s}dm(t)<\infty$,

联合(20.7.3)式,

$$\int|\hat{G}(t)|^2(1+|t_1|^{2s}+\cdots+|t_d|^{2s})dm(t)<\infty.$$

如(15.2.2)的证明,可推导出

$$\int|\hat{G}(t)|^2(1+\|t\|^2)^s dm(t)<\infty.$$

由(20.7.2),

$$\psi\lambda\in H^s,$$

因此式对所有的 $\psi\in D(\Omega)$ 成立,$\lambda$ 是局部 $H^s$ 的,故证得 (c)⇒(a)。

## 第二十一节　解的正则性定理

本节中,设 $\Omega$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 中非空开集。设 $N$ 是固定的自然数,对所有满足 $|\alpha|\leqslant N$ 的 $d$ 重整数 $\alpha$,$f_\alpha\in C^\infty(\Omega)$,且设存在某 $\alpha$,使 $|\alpha|=N$,而 $f_\alpha\neq 0$。

定义线性偏微分算子 $L:D'(\Omega)\mapsto D'(\Omega)$ 如下:

$$L(\Lambda)=\sum_{|\alpha|\leqslant N}(-i)^{|\alpha|}f_\alpha D^\alpha\Lambda,\quad \Lambda\in D'(\Omega),$$

又设 $\Pi\in D'(\Omega)$。

§ 21.1　**定义**　$L$ 称为椭圆的,如满足以下条件:

$$x\in\Omega,y\in\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}\Rightarrow\sum_{|\alpha|=N}f_\alpha(x)y^\alpha\neq 0,$$

此条件等价于:$\forall x\in\Omega,\exists C_0(x)>0$ 使

$$\left|\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha\right| \geqslant C_0(x)\|y\|^N \qquad (21.1.1)$$

§ 21.2 **引理** 设 $\varphi,\psi\in D(\Omega)$,记

$$\Omega\{\psi=1\}=\{x\in\Omega: \psi(x)=1\},$$

若
$$\operatorname{int}\Omega\{\psi=1\}\supset \operatorname{supp}\varphi,$$

$\psi\Pi\in H^t$ 且 $L(\Pi)$是局部 $H^{t-N+1}$ 的,

则有

① $\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha \varphi D^\alpha \Pi\in H^{t-N+1}$。

② $\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha D^\alpha(\varphi\Pi)\in H^{t-N+1}$。

③ 如 $L$ 是椭圆的,且对所有满足 $|\alpha|=N$ 的 $d$ 重整数 $\alpha$,$f_\alpha$ 在 $\Omega$ 上是常数,则 $\varphi\Pi\in H^{t+1}$。

[证]

① 对所有满足 $|\alpha|<N$ 的 $\alpha$,记

$$\varphi_\alpha=f_\alpha\varphi\in D(\Omega),$$

$\rho_\alpha$ 是 $\varphi_\alpha$ 延拓到 $\boldsymbol{R}^d$ 上,在 $\Omega$ 外令 $\rho_\alpha=0$,则因

$$\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset\operatorname{supp}\varphi\subset\operatorname{int}\Omega\{\psi=1\},$$

对所有满足 $|\alpha|<N$ 的 $\alpha$,

$$f_\alpha\varphi D^\alpha\Pi=\varphi_\alpha D^\alpha\Pi=\rho_\alpha D^\alpha(\psi\Pi),$$

由假设 $\psi\Pi\in H^t$,用定理 20.3 ③、④,

$$\rho_\alpha D^\alpha(\psi\Pi)\in H^{t-N+1}。$$

由引理 20.4 ②,

$$\sum_{|\alpha|<N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha\varphi D^\alpha\Pi=\varphi L(\Pi)\in H^{t-N+1},$$

所以
$$\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha\varphi D^\alpha\Pi\in H^{t-N+1}。$$

② 由引理 20.6 ①和 Leibniz 公式,

$$\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha D^\alpha(\varphi\Pi)$$
$$=\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|} f_\alpha\Big(\varphi D^\alpha\Pi+\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}\varphi\cdot D^\beta\Pi\Big),$$

这里 $\beta<\alpha$ 表示 $\beta\leqslant\alpha$ 且 $\beta\neq\alpha$。

对所有满足 $|\beta|\leqslant N-1$ 的 $\beta$，合并含有 $D^\beta\Pi$ 因子的项，则存在 $\varphi_\beta\in D(\Omega)$ 满足

$$\operatorname{supp}\varphi_\beta\subseteq\operatorname{supp}\varphi,$$

且

$$\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|}f_\alpha D^\alpha(\varphi\Pi)$$
$$=\sum_{|\alpha|=N}(-i)^{|\alpha|}f_\alpha\varphi D^\alpha\Pi+\sum_{|\beta|\leqslant N-1}\varphi_\beta D^\beta\Pi,$$

应用在①中用过的论证，对所有满足 $|\beta|\leqslant N-1$ 的 $\beta$，

$$\varphi_\beta D^\beta\Pi\in H^{t-N+1};$$

由①可推出②。

③ 由下式定义 $\boldsymbol{R}^d$ 上 $N$ 次多项式 $P:\boldsymbol{R}^d\mapsto\boldsymbol{C}$，

$$P(y)=\sum_{|\alpha|=N}f_\alpha y^\alpha,\quad y\in\boldsymbol{R}^d,$$

$P$ 称为微分算子 $L$ 的特征多项式，重新把②写成

$$P(-iD)(\varphi\Pi)\in H^{t-N+1}\tag{21.2.1}$$

定义线性算子 $T_P:H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 由下式

$$F(T_P(\lambda))=PF\lambda,\quad\lambda\in H^{-\infty},$$

即

$$T_P(\lambda)=(\Lambda_{PF\lambda})^{\vee\wedge},\quad\hat{\lambda}=\Lambda_{F\lambda},$$

则

$$\Lambda_{F(P(-iD)(\varphi\Pi))}=(P(-iD)(\varphi\Pi))^\wedge=P(\varphi\Pi)^\wedge$$
$$=P\cdot\Lambda_{F(\varphi\Pi)}=\Lambda_{PF(\varphi\Pi)},$$

所以 $F(P(-iD)(\varphi\Pi))=P\cdot F(\varphi\Pi)=F(T_P(\varphi\Pi))$，

这样由(21.2.1)得

$$T_P(\varphi\Pi)\in H^{t-N+1}\tag{21.2.2}$$

定义 $a:\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}\mapsto\boldsymbol{C}$ 由下式

$$a(y)=P(y)/\|y\|^N,$$

因它是零次齐次的，即 $\forall r>0,a(ry)=a(y)$，又 $a(y)\neq0$，$|a|$ 在 $\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}$ 上有上界和正的下界。

定义线性算子 $T_a:H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 由下式

$$F(T_a(\lambda))=aF\lambda,\quad\lambda\in H^{-\infty},$$

即 $$T_a(\lambda)=(\Lambda_{aF\lambda})^{\vee\wedge},\ \hat{\lambda}=\Lambda_{F\lambda},$$

由定理20.3②，算子$T_a$是0阶的。把$\varphi$在$\mathbf{R}^d$上的延拓记成$\rho$,在$\Omega$外令$\rho=0$。由假设$\psi\Pi\in H^t$,故由定理20.3④，

$$\phi\Pi=\rho(\psi\Pi)\in H^t。$$

因$N\geqslant 1, T_a(\varphi\Pi)\in H^t\subset H^{t-N+1}$,

由(21.2.2),

$$(T_a+T_P)(\varphi\Pi)\in H^{t-N+1} \tag{21.2.3}$$

由(21.1.1),∃数$c_0>0$,使

$$|P(y)|\geqslant c_0\|y\|^N,$$

故 $$\forall y\in\mathbf{R}^d\setminus\{0\},$$

$$|(a+P)(y)|=(1+\|y\|^N)|a(y)|\geqslant c_0(1+\|y\|^N)$$
$$\geqslant c_1(1+\|y\|^2)^{N/2} \tag{21.2.4}$$

其中$c_1=c_0\cdot\min(2^{1-N/2},1)>0$;

也有 $$|(a+P)(y)|\leqslant c_2(1+\|y\|^2)^{N/2},\quad c_2>0。$$

易见$T_a+T_P=T_{(a+P)}$,其中

$$F(T_{(a+P)}(\lambda))=(a+P)F\lambda,\quad \lambda\in H^{-\infty},$$

即 $$T_{(a+P)}(\lambda)=(\Lambda_{(a+P)F\lambda})^{\vee\wedge},\ \hat{\lambda}=\Lambda_{F\lambda}。$$

$\forall\lambda\in H^s$,

$$\|T_{(a+P)}(\lambda)\|_{s-N}^2=\int|((a+P)F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-N}dm(x)$$

$$\leqslant c_2^2\int|F\lambda(x)|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$=c_2^2\|\lambda\|_s。$$

所以$T_{(a+P)}$是把$H^s$映入$H^{s-N}$的连续线性映射。

$T_{(a+P)}$是一一的，如$T_{(a+P)}(\lambda)=0$,则

$$(T_{(a+P)}(\lambda))^\wedge=\Lambda_{(a+P)F\lambda}=0,$$

$$(a+P)F\lambda=0;\quad \text{a.e.}。$$

由(21.2.4),$F\lambda=0$, a.e.,

所以 $$\lambda=0。$$

以下证明 $T_{(a+P)}(H^s)=H^{s-N}$，

$$\forall\lambda\in H^{s-N},\quad \hat{\lambda}=\Lambda_{F\lambda},$$

$$\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-N}dm(x)<\infty,$$

$$\int\left|\frac{(F\lambda)(x)}{a(x)+P(x)}\right|^2(1+\|x\|^2)^s dm(x)$$

$$\leqslant\frac{1}{c_1^2}\int|(F\lambda)(x)|^2(1+\|x\|^2)^{s-N}dm(x)<\infty,$$

所以 $$\Lambda_{(F\lambda/(a+P))}\in S',$$

令 $$\Sigma=(\Lambda_{(F\lambda/(a+P))})^{\check{}},\quad 则\ \hat{\Sigma}=\Lambda_{(F\lambda/(a+P))},$$

所以 $\Sigma\in H^s$，

$$T_{(a+P)}(\Sigma)=(\Lambda_{(a+P)(F\lambda/(a+P))})^{\check{}\,\hat{}}=(\Lambda_{F\lambda})^{\check{}\,\hat{}}$$
$$=(\hat{\lambda})^{\check{}\,\hat{}}=\lambda,$$

所以 $$T_{(a+P)}(H^s)=H^{s-N},$$

因此 $(T_{(a+P)})^{-1}$: $H^{-\infty}\mapsto H^{-\infty}$ 存在，它把 $H^{s-N}$ 映成 $H^s$，由 Banach 空间中的逆算子定理，它是 $H^{s-N}\mapsto H^s$ 的连续映射，所以它有阶数 $-N$，而且

$$(T_{(a+P)})^{-1}=T_{(a+P)^{-1}}。$$

由(21.2.2)，

$$\varphi\Pi=(T_{(a+P)})^{-1}(T_a+T_P)(\varphi\Pi)\in H^{t+1}。$$

§21.3 **定理** 设微分算子 $L$ 是椭圆的，对所有满足 $|\alpha|=N$ 的 $\alpha$，$f_\alpha$ 在 $\Omega$ 上是常数，$\Pi\in D'(\Omega)$，且 $L(\Pi)$ 是局部 $H^s$ 的，则 $\Pi$ 是局部 $H^{s+N}$ 的。

[**证**] 设 $\psi\in D(\Omega)$，取 $\psi_0\in D(\Omega)$ 使

$$\operatorname{int}\Omega\{\psi_0=1\}\subset\operatorname{supp}\psi,$$

$\psi_0\Pi\in D'(R^d)$ 且有紧支集，由定义 20.1，存在正整数 $k$ 使得

$$\psi_0\Pi\in H^{s+N-k}.$$

取 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k\in D(\Omega)$，使 $\psi_k=\psi$，且

$$\operatorname{int}\Omega\{\psi_0=1\}\supset\operatorname{supp}\psi_1\supset\operatorname{int}\Omega\{\psi_1=1\}$$
$$\supset\cdots\supset\operatorname{int}\Omega\{\psi_{k-1}=1\}\supset\operatorname{supp}\psi_k。$$

由引理 21.2③，因

$$\operatorname{int}\Omega\{\psi_0=1\}\supset\operatorname{supp}\psi_1,\psi_0\Pi\in H^{s+N-k},$$

且 $L(\Pi)$ 是局部 $H^{s+1-k}$ 的，所以

$$\psi_1\Pi\in H^{s+N+1-k}。$$

重复用引理 21.2 ③，因

$$\operatorname{int}\Omega\{\psi_1=1\}\supset\operatorname{supp}\psi_2,\ \psi_1\Pi\in H^{s+N+1-k},$$

且 $L(\Pi)$ 是局部 $H^{s+2-k}$ 的，所以

$$\psi_2\Pi\in H^{s+N+2-k},$$

………………

$$\operatorname{int}\Omega\{\psi_{k-1}=1\}\supset\operatorname{supp}\psi_k,\ \psi_{k-1}\Pi\in H^{s+N-1},$$

且 $L(\Pi)$ 是局部 $H^s$ 的，所以

$$\psi\Pi=\psi_k\Pi\in H^{s+N}。$$

由于 $\psi\in D(\Omega)$ 的任意性，所以 $\Pi$ 是局部 $H^{s+N}$ 的。

§21.4 **注** 如当 $|\alpha|=N$ 时，$f_\alpha$ 不是常数，定理 21.3 的结论仍成立，但其证明更复杂。

§21.5 **定理** 设 $L$ 如定理 21.3，$f\in C^\infty(\Omega)$，且 $L(\Pi)=\Lambda_f$，则存在 $g\in C^\infty(\Omega)$，满足 $\Pi=\Lambda_g$，因而 $L(g)=f$。

[证] 由定理 21.3、定理 20.7 和系 15.5。

此定理说明，对椭圆的线性偏微分方程

$$L(\Pi)=\Lambda_f,$$

当右端的 $f\in C^\infty(\Omega)$，则广义函数解即是古典解，而且是无穷可微的。

§21.6 **系** 设 $\Omega=\boldsymbol{R}^d$，$L$ 如定理 21.3，且 $L(\Pi)=\delta_0$，则存在 $g\in C^\infty(\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\})$ 使在 $\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}$ 上，$\Pi=\Lambda_g$。

[证] 取 $\Omega_1=\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}$，$\forall\varphi\in D(\Omega_1)$，

$\varphi L(\Pi)=\varphi\delta_0=0$,

$\Pi\in D'(R^d)\subset D'(\Omega_1)$。$\forall s\in \boldsymbol{R},\varphi L(\Pi)\in H^s$，即$L(\Pi)$是局部$H^s$的，所以$\Pi$看作$\Omega_1$上的广义函数是局部$H^{s+N}$的。

由定理20.7，$\forall\alpha,D^\alpha\Pi$是在$\Omega_1$上局部$L^2$的，由系15.5，$\exists g\in C^\infty(R^d\setminus\{0\})$，使在$\boldsymbol{R}^d\setminus\{0\}$上，$\Pi=\Lambda_g$。

§21.7 **系** 设$d=2,\Pi\in D'(\Omega)$满足

$$D_1\Pi+iD_2\Pi=0 \tag{21.7.1}$$

则存在$g\in C^\infty(\Omega)$，满足$\Pi=\Lambda_g$。即每一全纯的广义函数是全纯函数(满足(21.7.1)的广义函数称为全纯的广义函数)。

［证］ $L=\dfrac{\partial}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial}{\partial x_2}=(-i)i\dfrac{\partial}{\partial x_1}+(-i)(-1)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$，

所以特征多项式 $P(y)=iy_1-y_2$，

当$y=(y_1,y_2)\neq 0$时，$P(y)\neq 0$，所以$L$是椭圆的。由定理21.5，当$L(\Pi)=0$时，$\exists g\in C^\infty(\Omega)$满足$\Pi=\Lambda_g$，设$g$的实部、虚部分别为$u,v$，则

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[u(x_1,x_2)+iv(x_1,x_2)]+i\frac{\partial}{\partial x_2}[u(x_1,x_2)+iv(x_1,x_2)]$$
$$=0,$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial v}{\partial x_2},\quad \frac{\partial v}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial x_2},$$

如令
$$z=x_1+ix_2,$$

则$g(z)=g(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+iv(x_1,x_2)$是$\Omega$上的全纯函数。

(21.7.1)相当于Cauchy-Riemann方程。

# 参考书目

1. 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978。

2. J.L. Kelley, General Topology, Van Nostrand Princeton, 1955.

3. S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 1970。

4. W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, Inc. 1973。

5. L. Schwartz, Théorie des Distributions, I, II, 2nd ed. Hermann, Paris, 1957。

6. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные Функции* 1,2,3, Москва, 1958。
   中译本，广义函数 I，II，III，科学出版社 1965—1985。

7. И.М. Гельфанд, Н.Я Виленкин, *Обобщенные Функции* 4, Москва, 1961。
   中译本，广义函数 IV 科学出版社，1965

8. I.M. Gelfand, M.I. Graev, N. Ya Vilenkin, Generalized Functions, Vol.5, Academic Press, New York。

9. J.F. Colombeau, New Generalized Functions and Multiplication of Distributions, North-Holland, 1984。

10. J.F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967

11. Z. Szmydt, Fourier Transformation and Linear Differential Equations, Warszawa, 1977
12. D. Jones, The Theory of Generalised Functions, Cambridge University Press, 1982
13. M.J. Lighthill（莱特希尔），富里叶分析与广义函数引论，中译本，科学出版社，1965。
14. 岩村联，广义函数，中译本，上海科学技术出版社，1961。
15. 周锦诚，傅里叶级数与广义函数论，科学出版社，1983
16. J. Barros-Neto（J. 巴罗斯-尼托）广义函数引论，中译本，上海科学技术出版社，1981。
17. A. Friedman, Generalized Functions and Partial Differential Equations, Prentice-Hall, Inc. 1963。
18. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis, Springer-Verlag, 1983。
19. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators Ⅱ, Differential Operator with Constant Coefficients, Springer Verlag, 1983。
20. L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1963。中译本，霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1980。
21. 夏道行、杨亚立，线性拓扑空间引论，上海科学技术出版社，1986
22. G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer-Verlag, 1983。
23. J. Horvath, Topological Vector Spaces and Distributions, Addison-Wesley, 1966。
24. 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958。